

POLITECNICO DI MILANO
Facoltà di Ingegneria delle Telecomunicazioni

STUDIO DI ALGORITMI DI BEAMFORMING, TECNICHE DI
MITIGAZIONE DELLE RADIOINTERFERENZE E PROCEDURE DI
CALIBRAZIONE APPLICABILI AI RADIOTELESCOPI DI NUOVA
GENERAZIONE (*SKA: Square Kilometre Array*).

TESI DI LAUREA
di
CALIENDO Domenico
(Matr. 631441)

Anno Accademico 2003/2004

Relatore: Prof. Gian Guido GENTILI

Correlatori: Prof. Stelio MONTEBUGNOLI

Ing. Fabio GHELFI

Ai miei genitori.

In memoria dei miei cari scomparsi.

*Il tempo impiegato per raggiungere questo traguardo
è il tempo che non ho trascorso con voi.*

RINGRAZIAMENTI

Sono diverse le persone che più o meno direttamente hanno contribuito alla realizzazione di questo lavoro. A tutte loro va il mio più sentito ringraziamento.

In modo particolare, vorrei ringraziare il Prof. S. Montebugnoli, direttore della stazione radioastronomica di Medicina, per avermi concesso di svolgere questa tesi presso l'Istituto di RadioAstronomia del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per aver sempre creduto in me ed avermi supportato con ogni mezzo nelle mie ricerche; l'Ing. F. Ghelfi, per le attente revisioni del testo e le preziose osservazioni; il Prof. G. G. Gentili, del Politecnico di Milano, per avermi concesso di poter svolgere una tesi esterna; i Sigg. C. Bortolotti e M. Roma, del centro di controllo interferenze, per avermi messo a disposizione la propria esperienza pluriennale nel settore delle RFI; il Dr. G. Pupillo del CNR per il notevole contributo dato alla stesura del capitolo sulla calibrazione radioastronomica ed il Dr. C. Maccone, di Alenia Spazio S.p.A Torino, per le preziose lezioni private di matematica sulla trasformata di Karhunen-Loeve (KLT).

Ringrazio poi l'intero staff di Medicina, tutti i miei amici e le persone a me care, per essermi state vicine nei momenti di difficoltà, di scoraggiamento e di lontananza da casa; in particolar modo Maria Teresa: *non ho trovato in cielo stelle che brillassero come i tuoi occhi, Titti.*

Ma più di tutti vorrei ringraziare i miei genitori, per avermi sempre aiutato nella vita ed avermi sostenuto durante gli anni universitari: *a voi devo tutto e senza il vostro supporto non avrei mai potuto raggiungere questo traguardo.*

Domenico Caliendo

Milano, Dicembre 2004.

Indice

1	Concetti introduttivi	1
1.1	Il radiotelescopio <i>Croce del Nord</i>	1
1.2	SKA, il radiotelescopio del XXI secolo.	11
1.3	Il sistema BEST-1	13
2	Tecniche generiche di beamforming	23
2.1	Introduzione	23
2.2	Concetti e terminologia di base	27
2.2.1	Beamforming e filtraggio spaziale	27
2.2.2	Operatori statistici del secondo ordine	34
2.2.3	Classificazione dei beamformers	35
2.3	Beamforming data-independent	36
2.3.1	Beamforming classico	37
2.3.2	Beamforming data-independent generalizzato	40
2.3.3	Confronto tra i metodo classico e metodo generalizzato	42
2.4	Beamforming ad ottimo statistico	43
2.4.1	Multiple Sidelobe Canceller (MSC)	43
2.4.2	Utilizzo di un segnale di riferimento	44
2.4.3	Massimizzazione del Rapporto Segnale Rumore (max SNR)	45
2.4.4	Linearly Constrained Minimum Variance Beamforming (LCMV)	45
2.4.5	La cancellazione del segnale desiderato nel beamforming ad ottimo statistico.	50

2.5	Algoritmi adattativi per il beamforming	51
2.6	Cancellazione delle interferenze ed algoritmi di beamforming parzialmente adattativi	54
2.6.1	Cancellazione delle radiointerferenze e gradi di libertà	55
2.6.2	Progettazione di beamformers parzialmente adattativi	57
2.7	Metodi di implementazioni dei beamformers	59
2.8	Riassunto	60
3	Beamforming deterministico	63
3.1	Effetti del beamformer sul rapporto segnale/rumore	63
3.2	Beamforming deterministico in assenza di RFI	66
3.2.1	Beamforming classico	67
3.2.2	Beamforming MMSE	69
3.3	Beamforming deterministico in presenza di RFI	70
3.3.1	Beamforming con null steering	71
3.3.2	Guadagni arbitrari in direzioni arbitrarie	74
3.3.3	Beamforming MVDR	74
3.3.4	Beamforming MMSE	77
3.4	Beamforming deterministico con BEST-1	78
3.4.1	Equivocazione spaziale e lobi di grating	78
3.4.2	Beampattern del singolo dipolo di BEST-1	91
3.4.3	Beampattern del singolo sensore di BEST-1	91
3.4.4	Beampattern di BEST-1	93
3.4.5	Beamforming classico con BEST-1	96
3.4.6	Null steering con BEST-1	97
4	Beamforming adattativo	103
4.1	Algoritmi di beamforming adattativo	103
4.2	Algoritmo MVDR adattativo	106
4.2.1	Implementazione del MVDR adattativo	106

4.2.2	Autostruttura della matrice di covarianza	110
4.2.3	Stima degli steering vectors effettivi mediante \mathbf{R}	111
4.2.4	Velocità di convergenza della matrice di covarianza	114
4.2.5	Iniezione di rumore artificiale e calcolo di \mathbf{R}^{-1}	114
4.3	Esempi di MVDR adattativo con analisi SVD (Singular Value Decomposition)	115
4.3.1	Esempio 1: MVDR adattativo in assenza di equivocazione spaziale	115
4.3.2	Esempio 2: Interferenze all'interno del main beam	118
4.3.3	Esempio 3: MVDR adattativo in equivocazione spaziale	124
4.3.4	Esempio 4: Interferenze all'interno dei lobi di grating	129
4.4	Algoritmo MVDR adattativo con BEST-1	129
4.4.1	Esempio 5: MVDR adattativo con BEST-1	130
4.4.2	Esempio 6: Interferenze all'interno dei lobi di grating in BEST-1	141
4.5	RFI Mitigation mediante filtraggio adattativo	141
4.6	Conclusioni	141
5	MSC Beamforming con BEST-1	145
5.1	Descrizione del sistema SENTINEL 2	145
5.2	MSC beamforming e filtraggio di Wiener	146
5.3	MSC beamforming in dettaglio	147
5.3.1	Funzione di trasferimento ottima	150
5.3.2	Adattività mediante LMS nel MSC beamforming	151
5.4	MSC adattativo a canali di riferimento multipli: gradi di libertà	152
5.5	Considerazioni pratiche sulla cancellazione adattativa in radioastronomia	153
5.6	Sistema SENTINEL 2 ed il MSC beamforming	154
5.7	Risultati sperimentali ottenuti con la tecnica MSC	155
5.7.1	Caso di segnali interferenti assenti	156
5.7.2	Caso di segnale interferente CW (sintetizzato)	156
5.7.3	Caso di segnale interferente AM (sintetizzato)	160
5.7.4	Caso di segnale interferente FM (sintetizzato)	160

5.7.5	Reiezione di una portante digitale a $419MHz$	160
5.7.6	Reiezione di segnali di telemetria a $402MHz$	160
5.7.7	Reiezione di un pallone sonda per meteorologia a $406MHz$	162
6	RFI Mitigation	169
6.1	Introduzione	169
6.2	Metodologie di soppressione delle RFI	170
6.2.1	Parametri che descrivono i risultati dei metodi	172
6.3	Cinque metodi di soppressione delle RFI	172
6.3.1	Rimozione nel dominio tempo-frequenza (<i>thresholding</i>)	173
6.3.2	Rimozione mediante stima parametrica (<i>autoclean</i>)	174
6.3.3	Rimozione adattativa delle interferenze mediante canali di riferimento (<i>MSC</i>)	179
6.3.4	Rimozione mediante filtraggio spaziale con sistemi multi-elemento (<i>beamforming</i>)	180
6.3.5	Rimozione mediante analisi della distribuzione di probabilità dello spettro di potenza	180
6.4	Valutazione dei metodi di mitigazione	182
6.4.1	RFI mitigation e tipologie di radiotelescopi	183
6.4.2	Conclusioni	184
6.5	RFI mitigation mediante <i>post-correlation filter</i>	185
6.5.1	Pre-detection filter	185
6.5.2	Post-correlation filter	188
6.5.3	Uso del post-correlation filter negli interferometri	192
6.5.4	Dettagli matematici sul post-correlation filter	192
6.6	Modelli di RFI	195
6.6.1	Modello di interferenza a banda stretta	196
6.6.2	Modello complessivo: segnali astronomici con interferenze e rumore	198
6.7	RFI Detection	199
6.7.1	Introduzione al problema	199

6.7.2	Rivelatore <i>single-channel</i>	200
6.7.3	Rivelatore <i>multi-channel</i> con risposta spaziale nota	202
6.7.4	Analisi agli autovalori	203
6.7.5	Rivelatore <i>multi-channel</i> con risposte spaziali ignote	206
6.8	Filtraggio a proiezione spaziale	208
6.8.1	Metodo delle proiezioni a sottospazi	208
7	Calibrazione degli interferometri radioastronomici	213
7.1	Sistemi di riferimento astronomici	213
7.1.1	Sistema azimutale (AZ-EL)	214
7.1.2	Sistema equatoriale (RA-DEC)	215
7.1.3	Giorno siderale	216
7.2	PULSAR: un banco di prova per la calibrazione di BEST-1	218
7.3	Radiosorgenti utilizzabili per la calibrazione di BEST-1	218
7.4	Calibrazione in ampiezza di BEST-1	221
7.5	Calibrazione in fase di BEST-1	222

Capitolo 1

Concetti introduttivi

1.1 Il radiotelescopio *Croce del Nord*

La *Croce del Nord* è un interferometro radioastronomico costruito in una tranquilla pianura a pochi chilometri da Medicina, nella provincia di Bologna. La sua costruzione è iniziata nel 1960, per poi concludersi nel 1967, sebbene in una versione ridotta rispetto al progetto originario (Fig. 1.1). Problemi tecnici alle antenne hanno suggerito un parziale rifacimento dello strumento, oltre ad un suo ammodernamento dal punto di vista elettronico e nel 1976 la *Croce del Nord* ha iniziato una nuova fase di attività.



Figura 1.1: Veduta aerea della *Croce del Nord*. Si scorge a lato l'antenna parabolica da 32m di diametro usata per le osservazioni in rete VLBI (*Very Long Baseline Interferometry*).

La *Croce del Nord* è stata progettata per operare alla frequenza di 408MHz ($\lambda = 73.5\text{cm}$) ed

attualmente viene impiegata con una banda di circa 2.5MHz . Si tratta di uno strumento *di transito*, ovvero regolabile soltanto in declinazione, e concepito dunque per osservare solo gli oggetti celesti che culminano sul meridiano celeste locale.

Il telescopio è costituito da due serie di antenne: una allineata in direzione Est-Ovest (E-W) e l'altra in direzione Nord-Sud (N-S). Il braccio E-W (Fig. 1.2) è costituito a sua volta da un'unica antenna, con un riflettore di forma cilindrico-parabolica lungo 564m e largo 35m . Lungo l'asse focale (parallelo all'asse di rotazione e a distanza di circa 20m da esso) si trovano disposti 1536 dipoli. Il braccio N-S (Fig. 1.3) è costituito da 64 antenne (anch'esse di forma cilindrico-parabolica) lunghe 23.5m e larghe 8m , disposte a 10m l'una dall'altra. Lungo l'asse focale di ogni antenna, analogamente al braccio E-W, sono disposti 64 dipoli.



Figura 1.2: La grande antenna cilindro-parabolica che costituisce il ramo E-W della *Croce del Nord*.

Il profilo parabolico per il riflettore (Fig. 1.4) è stato scelto per le note proprietà matematiche di tale curva, che consentono di:

1. far convergere nel fuoco tutte e sole le onde radio provenienti da una direzione ortogonale alla direttrice;
2. ottenere che tutti i punti del fronte d'onda, provenienti da tale direzione, si trovino ancora in fase nel fuoco.

La precisione meccanica della struttura non è da considerarsi in senso assoluto, ma relativamente alla lunghezza d'onda alla quale lo strumento lavora. Se la forma del riflettore non differisce da un profilo parabolico per più di un sedicesimo della lunghezza d'onda (tolleranza che deve comprendere gli effetti di deformazione meccanica, degli agenti atmosferici, etc.), si può ritenere che le imperfezioni

non influenzino in modo significativo il rendimento dello strumento.

Dovendo l'antenna operare ad una lunghezza d'onda di 73.5cm , è stato possibile realizzare il riflettore non a superficie completamente piena, ma utilizzando fili di acciaio (Fig. 1.5) a circa 2cm di distanza l'uno dall'altro.

Il potere risolutore massimo dello strumento (a centro banda) è di $4.5' \times 4'$, valore estremamente inferiore rispetto a quelli forniti dai telescopi ottici, ma con sensibilità di gran lunga superiore. Infatti la quantità di radiazione raccolta dalla *Croce del Nord* è nettamente maggiore, essendo tale grandezza proporzionale alla superficie colletttrice del riflettore che risulta essere di 31.025m^2 . Tale peculiarità consente di individuare ed osservare sorgenti estremamente deboli; che possono trovarsi a distanze estremamente elevate. Per tale motivo, la *Croce del Nord* è particolarmente adatta a condurre ricerche su sorgenti extragalattiche.

La conversione dell'energia elettromagnetica in tensione elettrica viene effettuata ad opera dei dipoli. Tale segnale deve poi essere trasportato nella sala centrale di elaborazione dei dati seguendo alcune specifiche:

1. limitare il più possibile il contributo di rumore dovuto all'attenuazione introdotta dalle linee di trasmissione coassiale (massimizzazione del rapporto segnale/rumore);
2. perseverare la coerenza di fase del fronte d'onda in tutti i punti in cui i segnali vengono a combinarsi.

I 1536 dipoli del braccio E-W sono divisi in 6 sezioni da 256 dipoli ciascuna. All'interno di ogni



Figura 1.3: Particolare con 2 delle 64 antenne cilindro-paraboliche che costituiscono il ramo N-S della *Croce del Nord*.

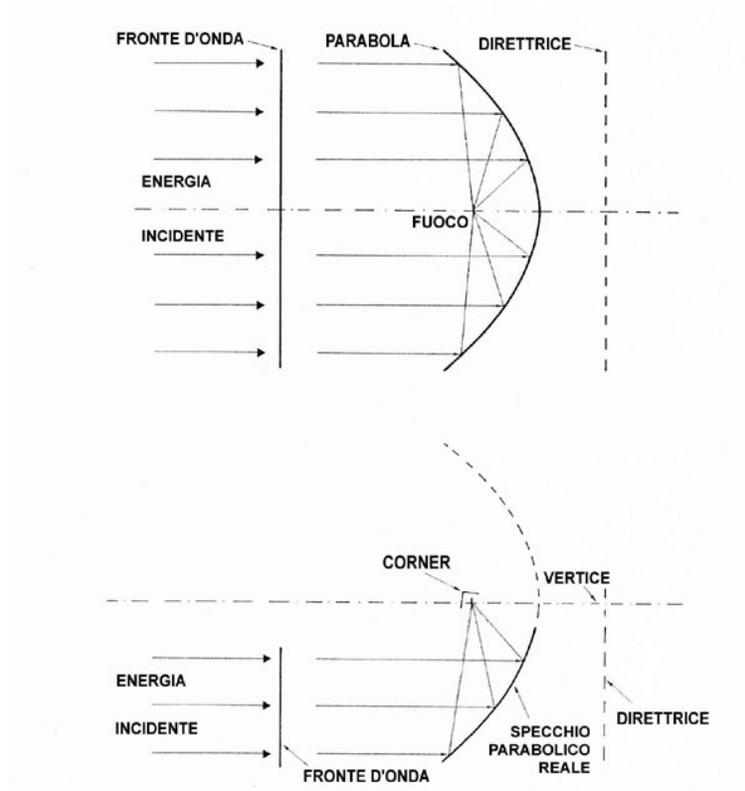


Figura 1.4: Nel primo grafico vengono evidenziati i parametri fondamentali e le proprietà della parabola. Nel secondo viene esemplificata la condizione reale che si ha nel ramo E-W della *Croce del Nord*: si noti la presenza del corner e come il riflettore non preveda di contenerne il vertice (*offset*).

sezione si opera una somma progressiva dei segnali raccolti, con un sommatore detto *ad albero di Natale* (Fig. 1.6), che permette di passare da 256 segnali elementari ad un unico segnale, rispettando le specifiche sopracitate. All'interno di ogni sottosezione, costituita ognuna da 64 dipoli, il segnale elettrico si muove lungo una linea cava di alluminio, mentre dalle sottosezioni fino alle cabine si muove lungo cavo coassiale rigido. La prima parte è quella più critica, in cui occorre mantenere possibilmente costanti le condizioni atmosferiche ed in particolare l'umidità. Per tale motivo sia i dipoli, sia il primo percorso in cava, originariamente erano racchiusi in un involucro di polietilene ad alta densità (trasparente alla radiazione elettromagnetica) riempito di aria secca. Il segnale radio a $408 \pm 1.25 MHz$ viene convertito a media frequenza per ridurre le perdite per *effetto pelle* e, giunge in cabina dove viene convertito a $30 \pm 1.25 MHz$ ¹. I segnali a frequenza intermedia vengono quindi portati nella stanza di elaborazione tramite cavi coassiali interrati a circa 1.20m di profondità, per sottrarli alle rapide variazioni termiche giornaliere che potrebbero alterare le delicate relazioni di fase ed ampiezza fra i segnali provenienti dalle 6 cabine. Le variazioni termiche lente (stagionali) non comportano causa di errore poichè vengono eliminate con le calibrazioni giornaliere.

Le 64 antenne che costituiscono il braccio N-S sono divise in 8 sezioni che raggruppano ciascuna 8 antenne. All'interno di ciascuna di essa si hanno 64 dipoli divisi in 4 sottogruppi da 16 dipoli disposti in parallelo. Questi 4 sottogruppi vengono sommati *ad albero di Natale* come nel caso del ramo E-W (vedi Fig. 1.7).

¹Si dimostra, infatti, che il trasporto su cavo coassiale comporta delle perdite proporzionali alla radice quadrata della frequenza.



Figura 1.5: Particolare del riflettore di una delle antenne che compongono il ramo N-S. In questa foto i fili d'acciaio sono ben visibili e appaiono più grossi di quanto non lo siano nella realtà a causa della brina.

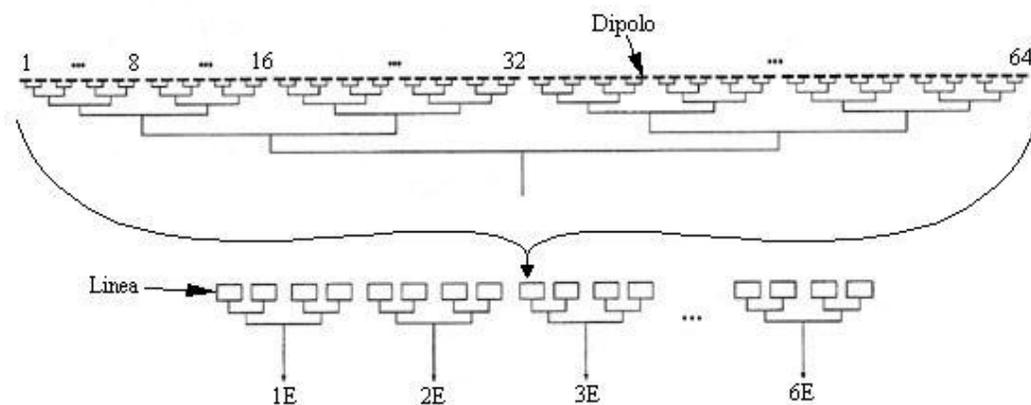


Figura 1.6: Lo schema del sommatore *ad albero di natale* impiegato nel ramo E-W: ogni canale è dato dalla somma in fase, a due a due, di 4 linee, ognuna delle quali è a sua volta ottenuta dalla somma in fase, a due a due, di 64 dipoli.

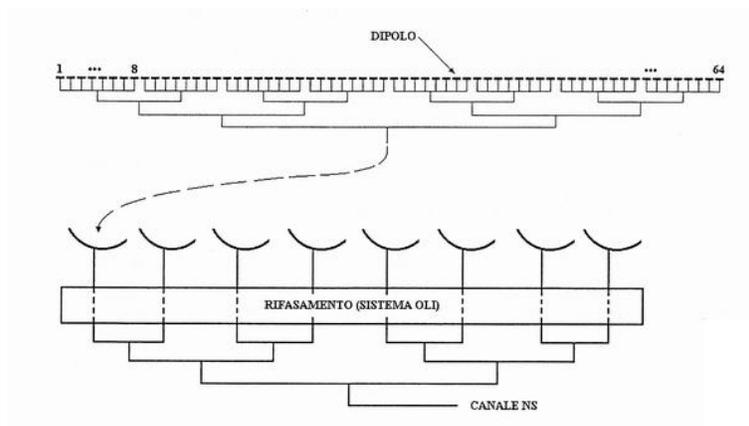


Figura 1.7: Lo schema *quasi ad albero di natale* impiegato nel ramo N-S: ogni canale è dato dalla somma in fase di 8 antenne singole, in ognuna delle quali il segnale è ottenuto dalla somma in fase, a due a due, di 8 gruppi di 8 dipoli ciascuno, sommati a loro volta in parallelo.

Si deve evidenziare come la situazione per il ramo N-S sia differente dal caso E-W: come si vede dalla Fig. 1.8 i punti equifase ($P_1, P_2 \dots P_8$) in genere non arrivano *in fase* sulle singole antenne poichè sono differenti i percorsi in aria ($L_1, L_2 \dots L_8$); si noti inoltre che tali percorsi variano con l'angolo di puntamento δ .

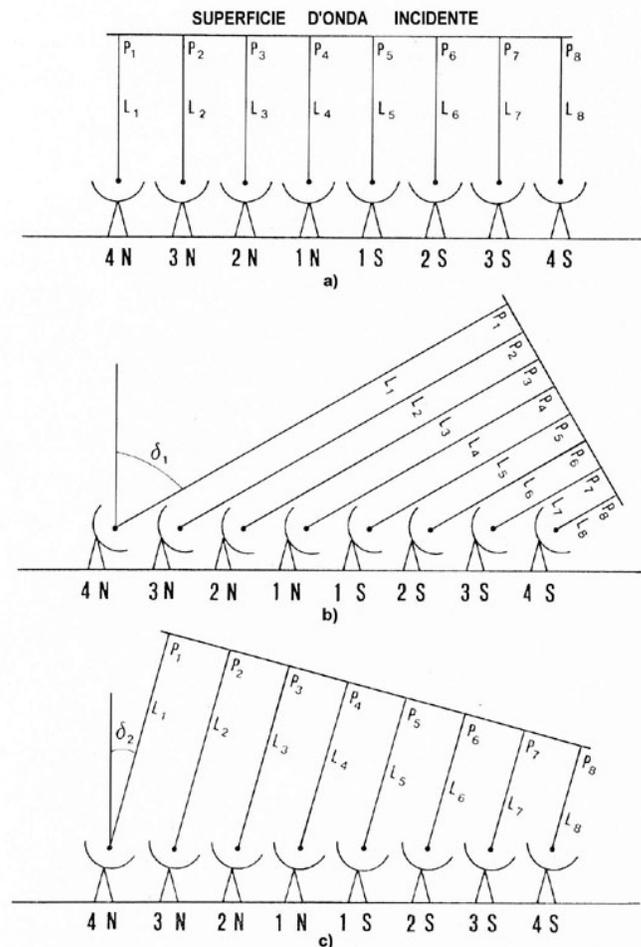


Figura 1.8: In questa figura vengono mostrate le posizioni relative fra le antenne di una qualunque sezione del ramo N-S ed il fronte d'onda elettromagnetico ricevuto per diversi valori dell'angolo di puntamento δ : in a) si ha un puntamento allo zenit, il fronte d'onda arriva in fase su tutte le antenne; mentre in b) e c) si ha puntamento a declinazioni differenti, con conseguenti differenti sfasamenti fra le singole antenne.

Occorre quindi un sistema di rifasamento, variabile con l'angolo di puntamento δ , per rifasare i segnali provenienti dalle singole antenne prima di sommarli a formare il segnale singolo. Attualmente il rifasamento viene ottenuto impiegando dei cavi coassiali immersi parzialmente nel kerosene. La lunghezza del tratto riempito dal fluido, che per via della maggiore costante dielettrica del mezzo determina una velocità di propagazione minore per il segnale che lo attraversa, è controllato da un

sistema elettro-idraulico: al variare dell'angolo di puntamento, il sistema provvede automaticamente ad impostare il giusto livello di kerosene nei cavi. Questo sistema è concettualmente semplice, seppur meccanicamente elaborato, ma non consente di raggiungere la massima efficienza dello strumento. Per tale motivo è in fase di studio presso l'istituto un nuovo sistema basato sull'impiego di moderni e flessibili *phase shifters*.

Giunto in cabina, il segnale viene convertito alla media frequenza di $30MHz$ (analogamente a quanto accade per il braccio E-W) e tramite cavi coassiali viene trasportato nella stanza di elaborazione. Ma prima i 14 segnali (6 E-W + 8 N-S) vengono fatti passare attraverso opportune linee di ritardo per equalizzare i diversi percorsi tra le 14 cabine e la stanza di elaborazione.

A questo punto tutto ciò che si è fatto è stato semplicemente convertire in tensioni elettriche misurabili l'energia elettromagnetica proveniente da una zona di cielo e concentrarla in 14 segnali distinti. Le cross-correlazioni tra questi 14 segnali forniscono a loro volta 6×8 segnali indipendenti.

Sommando in fase i segnali provenienti dalle 6 sezioni del braccio E-W si ottiene poi quello che viene chiamato *fascio B*. Ritardando progressivamente i segnali elettrici che arrivano dalle 6 sezioni del braccio E-W, prima di sommarli, si ottengono ulteriori fasci ed agli effetti pratici questa operazione equivale ad osservare zone di cielo circostanti il meridiano locale: con un anticipo sul meridiano si ottiene il *fascio A*, mentre con un ritardo si ottiene il *fascio C*. Cosicché, per via di un semplice artificio di natura elettrica, è come disporre di tre antenne puntate in direzioni progressive, invece di una singola antenna puntata verso il meridiano (Fig. 1.9). La sorgente, in moto apparente a causa della rotazione terrestre, attraverserà prima il fascio A, poi il fascio B ed infine il C. Un eventuale disturbo generato in prossimità del radiotelescopio (ovvero di origine *terrestre*) entrerà invece contemporaneamente nei 3 fasci. In questo metodo si può avere, oltre a 3 misure per ogni radiosorgente, anche un primo criterio di separazione tra radiosorgenti e radiointerferenze.

Analogamente si può operare con gli 8 segnali provenienti dalle sezioni N-S, ottenendo così 5 fasci (F,G,H,I e J) puntati elettricamente in 5 direzioni progressivamente spostate da Nord verso Sud (ma tutte alla stessa ascensione retta, quella del meridiano). In questo caso l'artificio permette di esplorare contemporaneamente una zona di cielo più estesa durante la stessa osservazione.

Nella stanza del ricevitore (Fig. 1.10) il segnale radioastronomico viene ulteriormente amplificato e filtrato per eliminare eventuali residui di interferenze presenti in prossimità della banda operativa dello strumento. Si equalizzano in fase ed ampiezza tutti i 14 contributi relativi ai 14 canali prima di elaborarli singolarmente od effettuarne la cross-correlazione con un banco di 48 correlatori complessi. Dopo l'elaborazione analogica i segnali vengono campionati ed acquisiti da un calcolatore che provvede ad effettuare una post-elaborazione dei dati ed un salvataggio su supporto magnetico degli stessi.

La Tab. 1.1 riassume le caratteristiche essenziali della *Croce del Nord*.

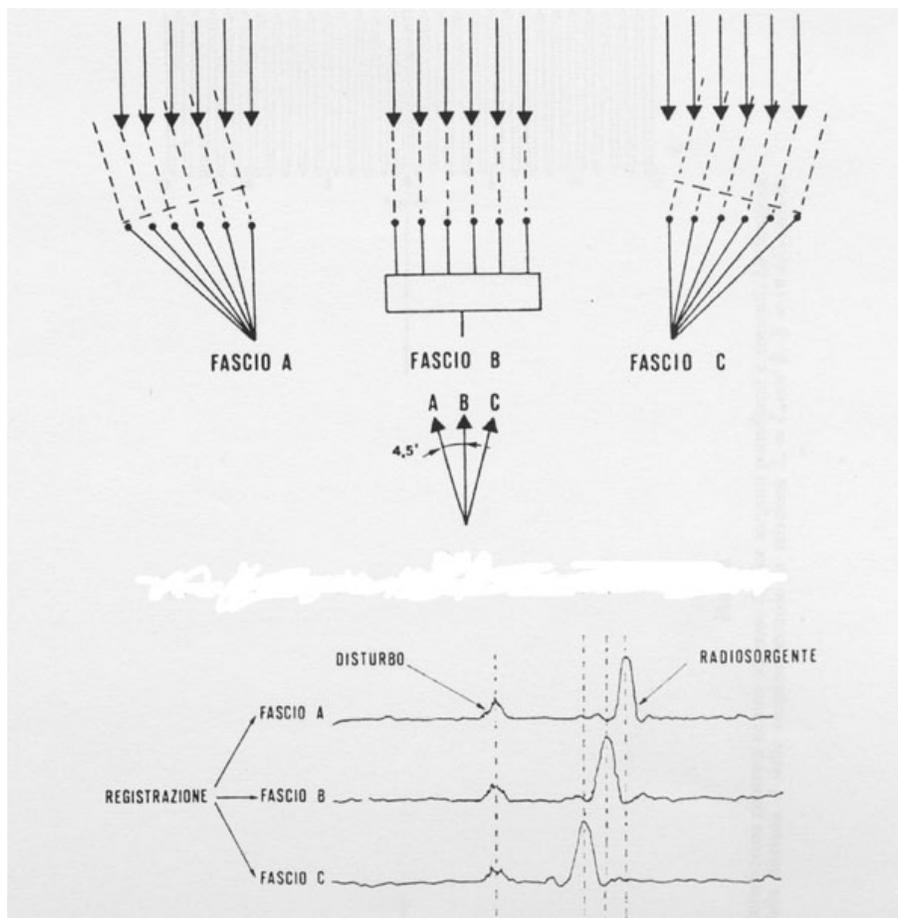


Figura 1.9: In questa figura viene raffigurata la formazione dei 3 fasci del ramo E-W, come si vede il fascio A risulta essere in anticipo sul fascio B, mentre il fascio C risulta essere in ritardo. La sorgente, in moto apparente a causa della rotazione terrestre, attraverserà prima il fascio A, poi il fascio B ed infine il C. Un eventuale disturbo generato in prossimità del radiotelescopio (ovvero di origine *terrestre*) entrerà invece contemporaneamente nei 3 fasci. In questo metodo si può avere, oltre a 3 misure per ogni radiosorgente, anche un primo criterio di separazione tra radiosorgenti e radiointerferenze.

PARAMETRO	VALORE
Frequenza operativa	408MHz ($\lambda = 0.735m$)
Larghezza di banda	2.5MHz e 5MHz (solo per il ramo E-W)
Risoluzione angolare	4' \times 110' (ramo EW in total power) 96' \times 3.6' $\sin \theta$ (ramo NS in total power) (θ angolo di zenit)
Numero di beam (ramo E-W)	5 (separati di 2')
Guadagno d'antenna (ramo E-W)	2.7 K/Jy
Numero di beam (ramo N-S)	5 (separati di 2')
Guadagno d'antenna (ramo N-S)	1.7 K/Jy
Flusso equivalente di sistema (ramo E-W)	60 Jy
Flusso equivalente di sistema (ramo N-S)	230 Jy
Area geometrica	31.020m ²
Area efficace stimata	20.000m ²
Copertura istantanea di cielo	0.5°
Numero di canali	6 (ramo E-W) + 8 (ramo N-S)
Numero di dipoli installati	1.536 (ramo E-W) + 4.096 (ramo N-S)

Tabella 1.1: Caratteristiche attuali della *Croce del Nord* per la configurazione attuale.



Figura 1.10: La stanza del ricevitore della *Croce del Nord*: in essa convivono apparecchiature realizzate negli anni '60 e '70 (lettore a carta, sistema di calibrazione. . .) e nei giorni nostri (spettrometro digitale, sistema PULSAR. . .).

1.2 SKA, il radiotelescopio del XXI secolo.

SKA è l'acronimo di *Square Kilometre Array*. Si tratta del più grande radiotelescopio al mondo che si prevede di costruire tra il 2010 ed il 2020. Come il nome stesso suggerisce, avrà un'area efficace di $1km^2$ ($1.000.000m^2$), cioè l'equivalente di più di 100 antenne paraboliche del diametro di $100m$ l'una.

Le ragioni che portano alla costruzione di SKA sono principalmente due. La prima, di carattere generale, è la necessità di disporre di uno strumento 100 volte più sensibile dei radiotelescopi attuali. La seconda è di natura più specifica: gli astronomi vorrebbero guardare l'Universo remoto per vedere i processi che hanno dato origine all'ordine ed alla struttura del cosmo, permettendo così la formazione di stelle e galassie. Il modo migliore per guardare in questo *tempo oscuro* è osservare la radiazione a microonde degli atomi di idrogeno (emissione H^I). La frequenza fondamentale per tale emissione è a circa $1420MHz$ ma, a causa dell'effetto Doppler dell'Universo in espansione, sono necessarie osservazioni anche a frequenze minori (fino a $200MHz$). Mentre molte delle possibili applicazioni di SKA sono emerse dopo le prime discussioni tenutesi negli anni '80, lo studio dell'Universo primordiale è stato da sempre un punto fisso tra gli obiettivi.

Pensando a SKA è facile arrivare a porsi due domande. La prima è: *perchè non raggiungere l'incremento di sensibilità di un fattore 100, attrezzando i radiotelescopi attuali con dei ricevitori più sensibili?* In effetti, miglioramenti in questo senso sono in corso presso i maggiori impianti, come il *Very Large Array* (VLA) americano e l'*Australia Telescope Compact Array* (ATCA). In realtà i ricevitori allo stato dell'arte che vengono utilizzati nei telescopi per le onde centimetriche ($< 10GHz$) hanno raggiunto livelli di prestazione ai quali la sensibilità non è più limitata esclusivamente dall'elettronica. L'unico modo pratico per incrementare la sensibilità è raccogliere maggiore energia dalle sorgenti sotto osservazione e questo significa maggiori aperture d'antenna.

La seconda questione che si potrebbe porre è: *perchè ricorrere ad un array?* A parte le ovvie difficoltà che si incontrerebbero nel costruire una singola apertura da un milione di metri quadri, si ha che l'estensione dell'apertura deve essere dell'ordine delle centinaia di chilometri se si vuole che SKA raggiunga la risoluzione di ~ 100 microsecondi d'arco necessaria per separare tutte le nuove radiosorgenti che sarà in grado di vedere. Tutto ciò porta alla nozione di *radiotelescopio ad apertura sintetica*, nella stessa filosofia seguita per il VLA e l'ATCA. Si osservi, tuttavia, che per ottenere immagini di buona qualità delle nuove deboli radiosorgenti, occorrerà un range dinamico di 10^6 ($60dB$), di gran lunga superiore a quello ottenuto mediante le tecniche di sintesi d'apertura attuali.

In Tab. 1.2 vengono riassunte le specifiche ad alto livello adottate per il progetto SKA. La specifica di sensibilità è il frutto di un compromesso tra area efficace, efficienza d'apertura e temperatura equivalente di rumore. Per avere un'idea di un sistema accettabile per SKA, si pensi ad un'apertura fisica di $2 \cdot 10^6 m^2$, con un'efficienza del 50% ed una temperatura di sistema di $50K$. Nei termini usati per i radioricevitori terrestri, la sensibilità di SKA in banda L è di circa $68dB/K$. Per rendere ancor meglio l'idea: un'apertura da $14m$ per i sensori che compongono l'array soddisferebbe le specifiche di campo visivo, mentre sensori con apertura maggiore ridurrebbero l'area istantanea di

cielo visibile (*field of view*).

PARAMETRO	VALORE
Sensibilità	$A_{eff}/T_{sys} = 2 \cdot 10^4 m^2/K$
Banda operativa	200MHz ... 12GHz
Beams simultanei	~ 100
Campo visivo	1° quadrato @ 1.4 GHz
Risoluzione angolare	0.1 secondi d'arco @ 1.4GHz
Bandwidth istantanea	$0.5 + f_o/5 [GHz]$
Canali spettrometro	10.000
Bande esplorabili simultaneamente	2
Errore da cross-polarizzazione	$\leq -40dB$
Range dinamico per l'imaging	$\geq 10^6 @ 1.4 GHz$

Tabella 1.2: Le specifiche ad alto livello adottate per il progetto SKA.

La specifica che determina principalmente la scelta della tecnologia da adottarsi riguarda il numero di beams sintetizzabili simultaneamente. È facile intuire che il *multi-beaming* sia una necessità dovuta a diverse ragioni: questioni scientifiche, efficienza di osservazione ed efficacia nella mitigazione delle interferenze prodotte dall'uomo. Eventualmente ci si potrebbe domandare se non sia limitativo concentrare i beam sintetizzati in un campo visivo di appena 1° quadrato. Perché in caso contrario, implementazioni di SKA ottenute mediante antenne a riflettore potrebbero costituire la soluzione ideale. Un punto importante da valutare, riguardo la critica decisione del tipo di sensore da impiegare, concerne l'efficienza finale della soluzione. Potrebbe infatti risultare più efficiente riservare una porzione della superficie complessiva (*sub-array*) ad ogni fascio, piuttosto che adottare una strategia multibeaming istantanea. D'altronde è pur vero che una certa classe di fenomeni astrofisici può essere osservata solo mediante fasci ben separati. La comunità scientifica deve riflettere profondamente prima di effettuare queste scelte. Un altro punto interessante è che in SKA i beams potrebbero essere formati digitalmente *off-line* a partire dai dati raccolti durante il transito della radiosorgente ma chiaramente questo non significa che un sistema multi-beaming non sia necessario.

Legata al numero di beams vi è poi la questione della gerarchia di aggregazione dei segnali. La soluzione SKA più flessibile potrebbe avere forse un milione di antenne dell'area efficace di $1m^2$ ciascuna, abbinata ad una rete *ultra-wide* di commutazione dei segnali che conduca ad un sistema di elaborazione digitale in grado, tra le altre cose, di calcolare le cross-correlazioni richieste per la sintesi d'apertura.

Trascurando la complessità che avrebbe il sistema RF e supponendo che continui a valere la *legge di Moore*², i correlatori astronomici nel 2010 potrebbero essere in grado di operare fino a $\sim 10^7$ giga-

²Nel 1965 Gordon Moore stava preparando una conferenza e riorganizzando i suoi dati sui chip di memoria, quando osservò che ogni chip aveva una capacità doppia rispetto al suo predecessore e che ogni 18-24 mesi nasceva una nuova generazione di chip. Questa legge è applicabile con discreta precisione anche ai processori e può quindi essere considerata un valido strumento di pianificazione per le industrie microelettroniche.

operazioni/secondo mentre l'imaging anche di un solo beam in un sistema simile richiederebbe una capacità di $\sim 10^{12}$ giga-operazioni/secondo. In una concezione più modesta di SKA, i segnali RF subirebbero delle aggregazioni per ridurre il numero di correlatori e quindi la capacità di elaborazione richiesta. In una proiezione basata sulla legge di Moore, un progetto per il 2010 consentirebbe l'impiego di 5000 sensori mentre un progetto per il 2020 ne consentirebbe un numero triplo. Tuttavia qualsiasi forma di aggregazione dei segnali, implicherebbe una perdita di versatilità dello strumento ed eventuali scelte in proposito andrebbero prese con grande cura per preservare la flessibilità di SKA nelle applicazioni scientifiche.

Vi sono state diverse proposte, da parte dei singoli paesi appartenenti al consorzio, sulle possibili implementazioni dei sensori di SKA: da estensioni delle tecnologie ormai ben consolidate, quali sofisticati riflettori parabolici, ad idee più stravaganti e di difficile realizzazione, come specchi deformabili dinamicamente, abbinati ad illuminatori focali sospesi da aerostati, capaci di sintetizzare localmente riflettori parabolici per ogni beam (Fig. 1.11). Tra le varie proposte non mancano i riflettori cilindro-parabolici, come quelli impiegati nella *Croce del Nord*, e le lenti di Luneburg (Fig. 1.12) le quali, sebbene siano le uniche in grado di offrire la massima sensibilità in ogni direzione ad un'architettura multi-beaming, implicano dei costi piuttosto elevati. In Tab. 1.3 vengono riassunte le tecnologie d'antenna prese in considerazione per SKA.

La decisione definitiva di dove costruire SKA verrà presa nel 2005 ma l'Australia, con i suoi vasti spazi deserti, la sua quiete elettromagnetica, le valide infrastrutture scientifiche ed ingegneristiche, risulta essere il candidato favorito. Inoltre l'emisfero australe, a tali latitudini, offre un'eccellente panoramica del centro della Via Lattea.

SKA è un progetto estremamente costoso ma sebbene le questioni economiche non vadano trascurate non bisogna lasciare che queste influenzino le ragioni del progetto. Con il supporto di SKA e di altri progetti simili al limite delle capacità umane, l'uomo potrebbe forse riuscire a capire meglio il significato della propria esistenza e la posizione che egli occupa all'interno dell'Universo.

1.3 Il sistema BEST-1

L'Istituto di RadioAstronomia costituisce uno degli organi istituzionali che collaborano al progetto SKA. La Croce del Nord, con i suoi $31.025m^2$ di area collettrice (circa 1/33 della superficie totale di SKA) costituisce un ottimo banco di prova per testare gli algoritmi di beamforming, le tecniche di mitigazione delle radiointerferenze e le procedure di calibrazione da applicare ai radiotelescopi di nuova generazione.

A tale scopo, un cilindro del ramo N-S è stato modificato (Fig. 1.13) per realizzare di un sistema sperimentale denominato BEST-1. Una volta effettuate le prove con BEST-1 e collaudate le varie tecniche di beamforming e di mitigazione delle RFI si vorrebbe passare al caso $2D$, impiegando un intero canale N-S (8 cilindri) prima (sistema BEST-2) per poi passare all'intera Croce del Nord, aggiungendo anche il ramo E-W (sistema BEST-3).

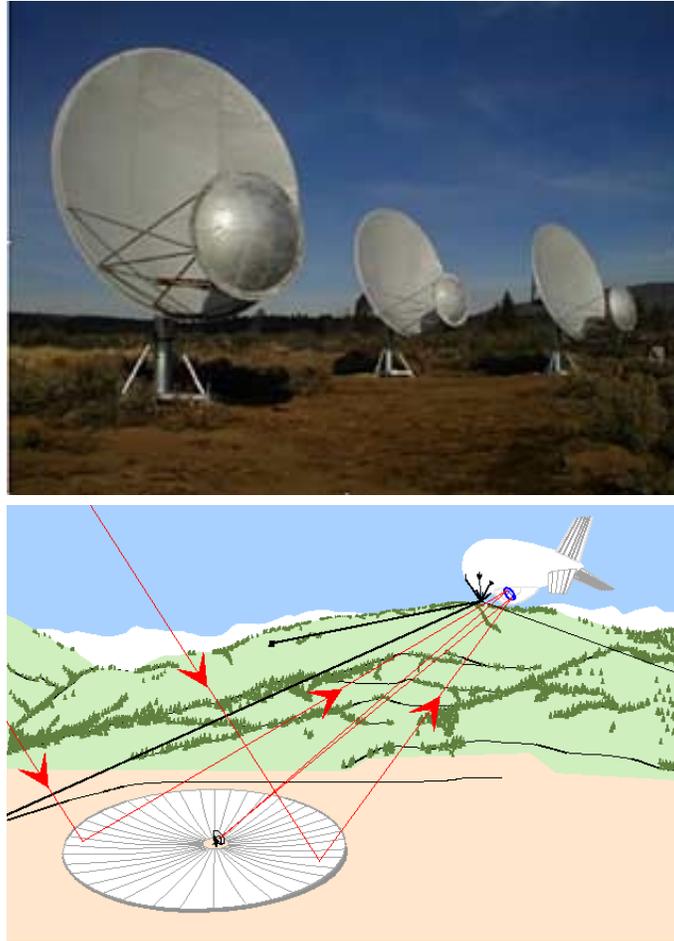


Figura 1.11: Possibili implementazioni proposte per il progetto SKA: sensori a riflettore parabolico (sopra) ed illuminatore focale sospeso da aerostato, con riflettore a terra deformabile dinamicamente (sotto).

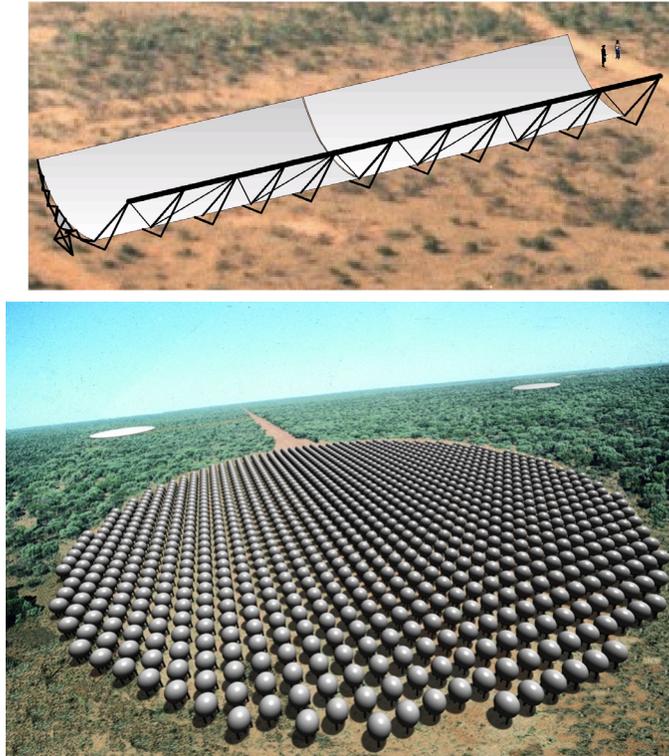


Figura 1.12: Altre possibili implementazioni proposte per il progetto SKA: riflettori cilindro-parabolici analoghi a quelli adottati dalla *Croce del Nord* (sopra) ed array planari a lenti di Luneburg (sotto).

TECNOLOGIA	VANTAGGI	SVANTAGGI
Riflettori parabolici	Tecnologia consolidata.	Strutture costose, meccanica complessa.
	Intrinsecamente direttivi. Buona discriminazione nei confronti di segnali indesiderati.	Limitato campo visivo. Sono possibili solo beam spazialmente vicini.
	Facile implementazione del beamformer all'altezza del fuoco.	
Array planari	Facili da costruire ed assemblare.	Finora uso limitato a costose applicazioni militari e simili.
	Produzione integrabile, scalabile economicamente.	Efficienza elevata solo per limitate aree di cielo.
		Problemi dovuti alla larga spaziatura dei sensori (lobi di grating) e con la banda larga.
Lenti di Luneburg	Massima sensibilità in tutte le direzioni spaziali. Libertà di allocazione dei sensori. Multibeaming possibile per vaste aree di cielo.	Struttura solida 3D. Peso elevato (100t per 5m di diametro).
	Beamforming a larga banda.	Finora sono state impiegate solo lenti di diametro limitato ($< 1m$).
		Costo molto elevato.

Tabella 1.3: Tecnologie d'antenna prese in considerazione per la realizzazione dei sensori di SKA.

Lo schema del sistema adottato per gli esperimenti con il sistema BEST-1 è riportato in Fig. 1.14. Il significato dei vari stadi verrà chiarito nei capitoli successivi.

I 64 dipoli che compongono l'antenna non hanno subito modifiche ed è stata conservata la struttura originale (in guida cava) che realizza il raggruppamento dei segnali (Fig. 1.15): i dipoli sono pertanto raggruppati a gruppi da 16 dando così origine ad un'array di soli 4 sensori spazati di 8λ . Come verrà illustrato nei capitoli dedicati al beamforming questa notevole spaziatura tra i sensori genera problemi di non poco conto (*lobi di grating* ed *equivocazione spaziale*) che rendono talune tecniche, ritenute tradizionali nella teoria dell'array signal processing, difficili se non addirittura impossibili da impiegare. A tal proposito si sta valutando la possibilità di adottare una configurazione leggermente diversa: 8 sensori da 8 dipoli l'uno, con spaziatura reciproca ridotta (4λ). Sebbene da una parte le cose migliorerebbero dal punto di vista del beamforming, si avrebbero anche una serie di svantaggi: un notevole incremento dei costi in quanto occorrerebbe modificare la meccanica della guida cava, un minore guadagno nei confronti del segnale radioastronomico (8 dipoli anziché 16), una maggiore complessità hardware ed un maggiore afflusso dati da gestire.

I 4 segnali vengono immediatamente amplificati con dei LNA³ (Fig. 1.16) posti direttamente lungo la linea focale. Una volta amplificati, i segnali RF vengono trasportati direttamente nella stanza del ricevitore, mediante un *link analogico in fibra ottica* (Fig. 1.17).

Il motivo di questa scelta sta nella necessità di semplificare quanto più possibile l'elettronica *esterna*, riducendo le probabilità di guasto e facilitando l'assemblaggio e la manutenzione dell'impianto.

³Low Noise Amplifier.



Figura 1.13: Una linea focale del ramo N-S viene rimossa dalla sua sede per costruire il sistema BEST-1.

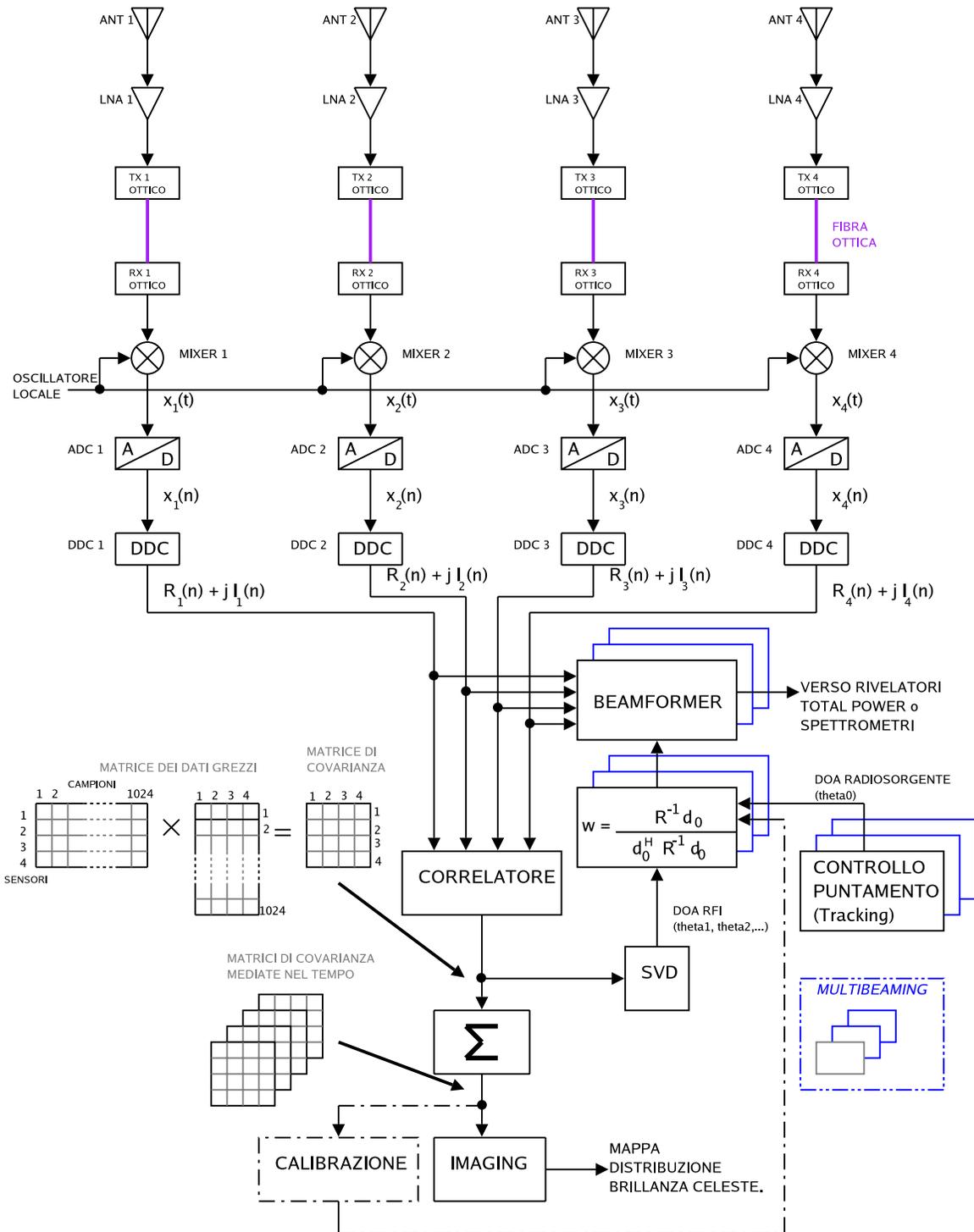


Figura 1.14: Schema a blocchi semplificato del sistema BEST-1. Il significato dei vari stadi verrà chiarito più avanti nei capitoli dedicati al beamforming ed all'RFI mitigation.



Figura 1.15: La linea focale viene preparata per l'installazione dei LNA.

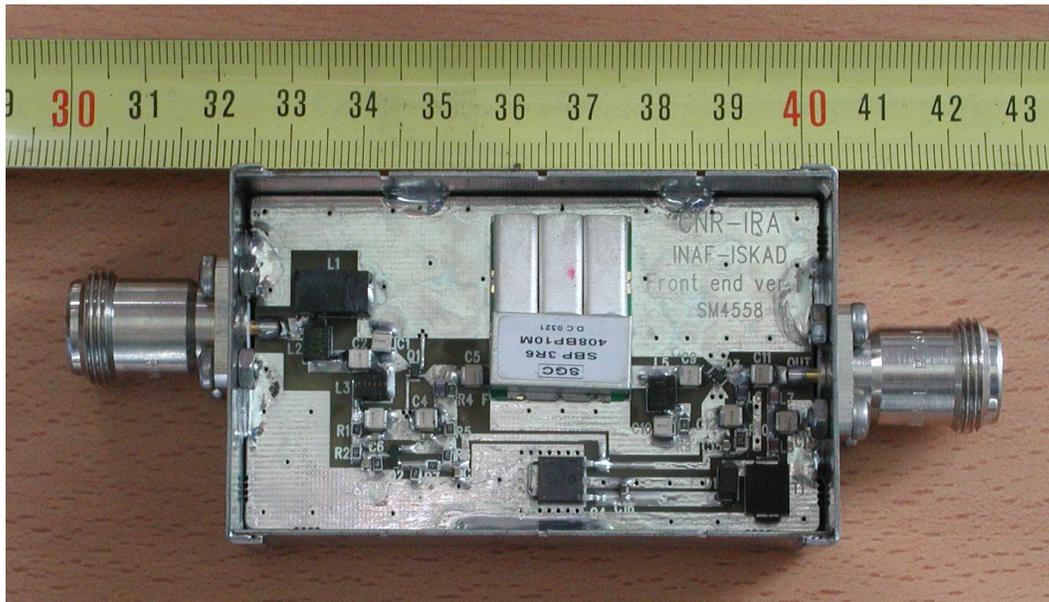


Figura 1.16: Uno dei 4 LNA di BEST-1. Questi amplificatori sono stati progettati e costruiti presso l'Istituto di RadioAstronomia.

Diversamente sarebbe stato necessario dotare i singoli front-end di un oscillatore locale (comune a tutti i mixer di conversione per avere la coerenza di fase necessaria al beamforming) ed eventualmente di stadi ADC⁴ esterni per una trasmissione digitale. In questo modo, invece, nella stanza di elaborazione giungono direttamente i segnali in banda base provenienti dai 4 amplificatori, con perdite di trasmissione ridotte rispetto alla trasmissione su cavo coassiale.

I segnali vengono convertiti ad una media frequenza di 30MHz per essere poi in parte elaborati dal sistema originario ed in parte campionati ad 80MS/s da un nuovo sistema di acquisizione digitale (Fig. 1.18) composto da 4 ADC da 14 bit AD6645 (*Analog Devices*) e 4 DDC⁵ AD6634. Questi ultimi effettuano una conversione digitale della banda utile nell'intorno della frequenza nulla. Il segnale diviene così di natura *complessa* e pertanto all'uscita ne vengono fornite le componenti in fase ed in quadratura I e Q (Fig. 1.19). Inoltre i DDC provvedono ad effettuare un filtraggio ed una decimazione del segnale acquisito.

Il flusso dati viene acquisito mediante una scheda PCI7300A installata all'interno di un calcolatore Xeon multiprocessore e da questo punto in poi ogni trattamento del segnale viene condotto per via software.

E' probabile che in futuro vengano installati sul front-end (in prossimità degli LNA) dei *phase shifters* allo scopo di sostituire il vecchio sistema di rifasamento a kerosene adottato dalla Croce del Nord (vedi paragrafo precedente) e consentire contemporaneamente un beamforming a livello RF.

⁴Analog to Digital Converter.

⁵Digital Down Converter.

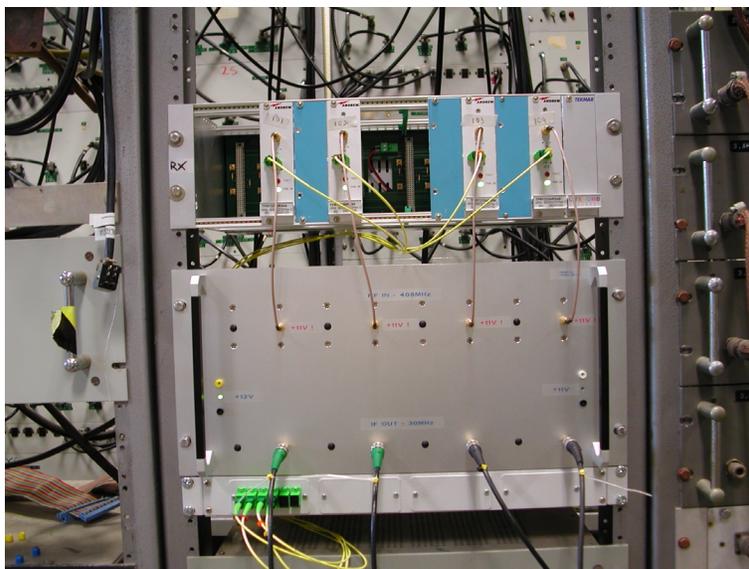


Figura 1.17: I 4 ricevitori analogici in fibra ottica ed i 4 mixer utilizzati per la conversione dei segnali a media frequenza.

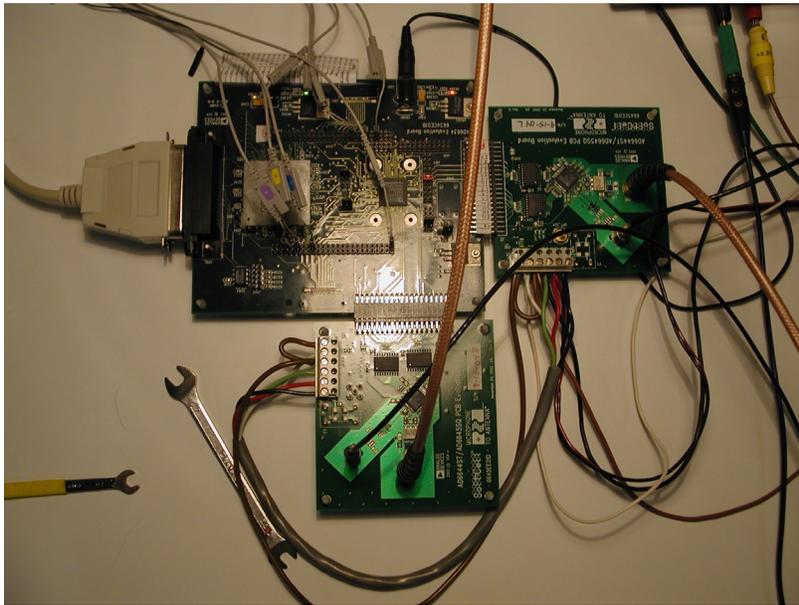


Figura 1.18: Le *evaluation board* di Analog Device utilizzate per provare gli ADC ed i DDC.

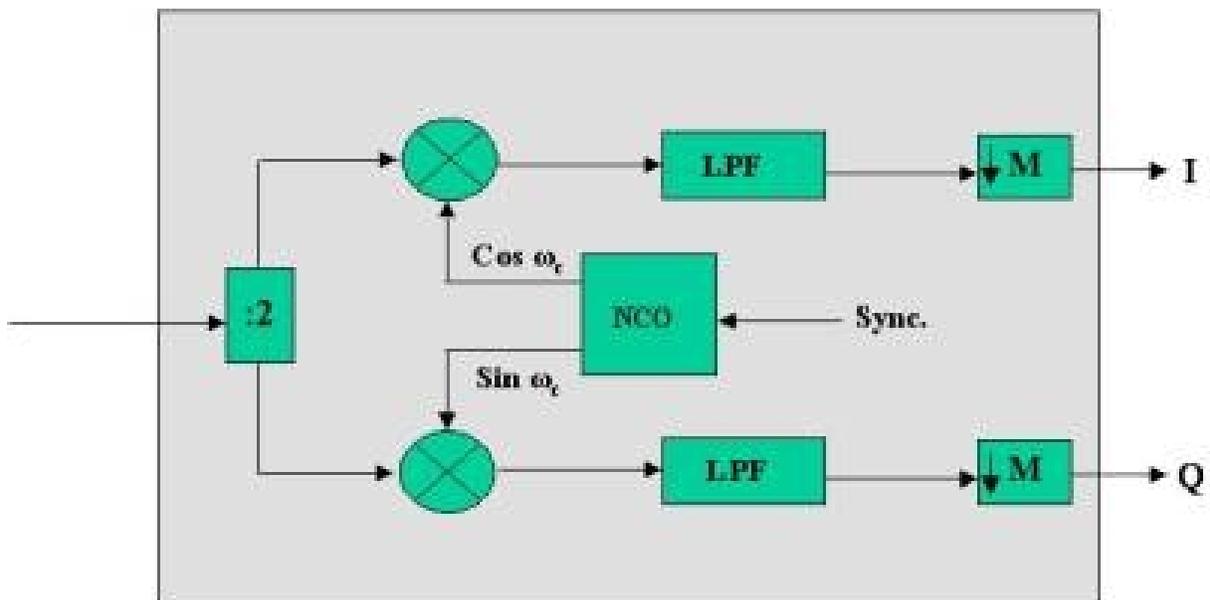


Figura 1.19: Schema a blocchi dello stadio DDC (*Digital Down Converter*). Il segnale digitale viene demodulato numericamente mediante un oscillatore numerico (NCO), il quale provvede a fornire le componenti in fase ed in quadratura. Segue un filtro passa-basso (LPF) ed un decimatore ($\downarrow M$).

Capitolo 2

Tecniche generiche di beamforming

Un *beamformer* è un sistema numerico utilizzato in combinazione con una schiera di sensori (*array*) per fornire una forma versatile di *filtraggio spaziale*: l'*array* raccoglie dei campioni spaziali del fronte d'onda che vengono processati dal beamformer. In generale dunque, l'obiettivo è stimare un determinato segnale proveniente da una certa direzione, in presenza di rumore ed interferenze.

Un beamformer pertanto realizza un filtraggio spaziale per separare segnali che si sovrappongono spettralmente ma che provengono da differenti direzioni dello spazio.

2.1 Introduzione

Il termine *beamforming* deriva dal fatto che originariamente i filtri spaziali venivano progettati per generare dei *pencil beams* (si veda il grafico di Fig. 2.1), al fine di ricevere nel miglior modo possibile il segnale irradiato da un punto specifico dello spazio, ed attenuare il più possibile eventuali segnali provenienti da altri punti. *Beamforming* sembra suggerire più una tecnica propensa alla radiazione di energia piuttosto che alla ricezione; in realtà è applicabile ad entrambi i casi. Nel resto della trattazione, si farà riferimento esclusivamente al beamforming per ricezione. I sistemi progettati per ricevere segnali che si propagano nello spazio si trovano spesso a dover fronteggiare segnali interferenti. Se il segnale desiderato ed i segnali interferenti occupano *contemporaneamente* la stessa banda di frequenze, il solo filtraggio temporale non può essere utilizzato per separare il segnale dall'interferenza. Tuttavia, il segnale desiderato ed i segnali interferenti, hanno solitamente origine da regioni spaziali differenti e questa *diversità spaziale* può essere sfruttata per isolare il segnale dalle interferenze usando un *filtro spaziale* al ricevitore.

L'implementazione di un *filtro temporale* richiede l'elaborazione dei dati raccolti in una *finestra temporale*. Analogamente, l'implementazione di un *filtro spaziale* richiede l'elaborazione di dati raccolti in una *finestra spaziale*.

In Tab. 2.1 vengono riportate alcune tra le diverse applicazioni che utilizzano il filtraggio spaziale dei

dati mentre la Fig. 2.1 illustra un'antenna parabolica per telecomunicazioni che impiega un'apertura spaziale *continua* per ottenere un filtraggio spaziale ad antenna singola.

Applicazione	Descrizione
RADAR	RADAR ad array rifasati; controllo del traffico aereo; RADAR ad apertura sintetica
SONAR	Localizzazione delle sorgenti e rispettiva classificazione
Telecomunicazioni	Trasmissione e ricezione direttiva; settorizzazione del broadcasting nelle comunicazioni da satellite.
Imaging	Ultrasuoni; ottica; tomografia
Esplorazione geofisica	Mappatura della crosta terrestre; ricerca petrolifera
Esplorazione astrofisica	Imaging ad alta risoluzione dell'Universo
Biomedica	Monitoraggio del feto; ipertermia dei tessuti; ausilio all'udito

Tabella 2.1: Gli array ed i beamformers forniscono uno strumento efficace e versatile per il filtraggio spaziale. Questa tabella riporta alcune delle applicazioni che ne fanno uso.

Quando il campionamento spaziale è *discreto*, il sistema che effettua il filtraggio spaziale viene detto *beamformer*.

Generalmente un beamformer combina linearmente le sequenze temporali in uscita da ogni sensore (derivanti dal campionamento spaziale) per ottenere in uscita una nuova sequenza (temporale); esattamente come un filtro FIR¹ combina linearmente i campioni temporali al suo ingresso.

Di seguito vengono discussi i due principali vantaggi nell'utilizzo del campionamento spaziale con array di sensori.

È noto che la capacità di risoluzione spaziale di un'antenna dipende dalle dimensioni della sua aper-

¹Finite Impulse Response. Filtro la cui risposta impulsiva conta un numero finito di termini.

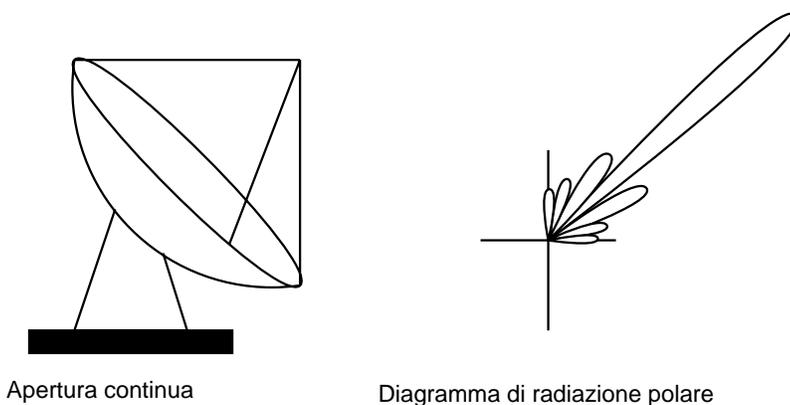


Figura 2.1: L'apertura spaziale *continua* di un'antenna a riflettore costituisce un primo esempio di filtraggio spaziale.

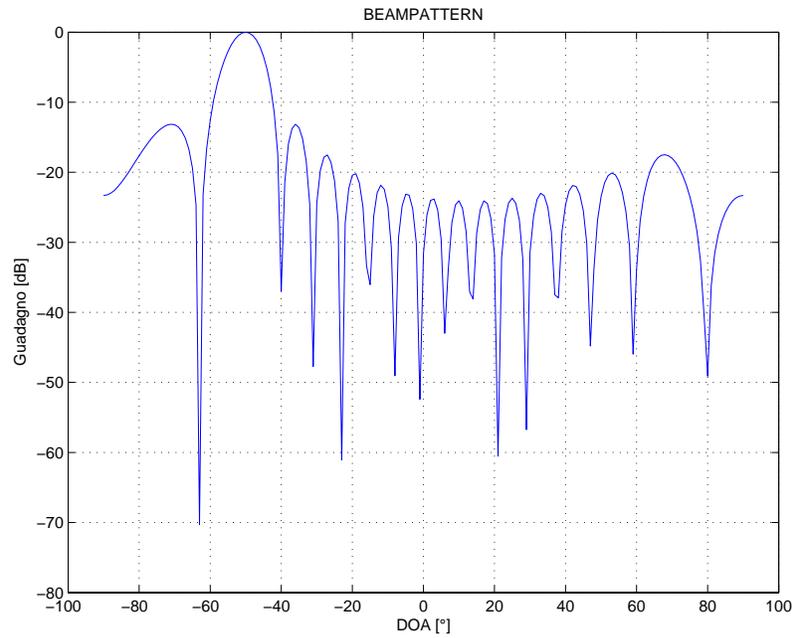


Figura 2.2: In questa figura viene riportato un esempio di beamformer a banda stretta ottenuto con 16 sensori ideali omnidirezionali, angolo di puntamento elettronico del fascio: -50° , frequenza temporale: $400MHz$, spaziatura tra i sensori: $\lambda/2$.

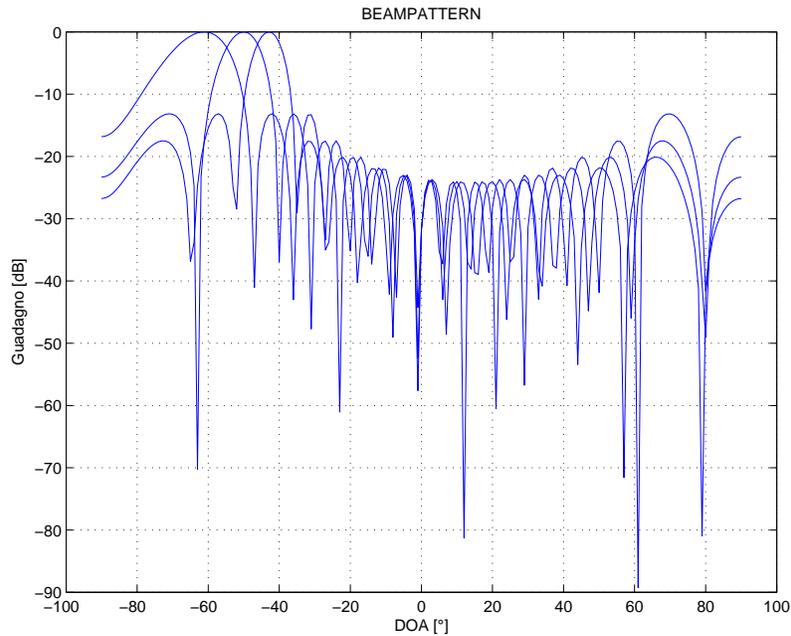


Figura 2.3: In quest'altra figura viene riportato l'andamento in frequenza del beamformer della figura precedente per 3 diversi valori della frequenza temporale: 350MHz , 400MHz e 450MHz . Si osserva che per larghe bande di frequenza, il puntamento voluto di -50° si ottiene solo in corrispondenza della frequenza sulla quale sono stati dimensionati i coefficienti del beamformer. Questo è essenzialmente il motivo per cui, come verrà spiegato più avanti, quando si ha a che fare con grandi bande spettrali conviene procedere per sottobande, dimensionando i coefficienti per ciascuna sottobanda ed implementando il beamforming in frequenza.

tura spaziale: essa migliora al crescere dell'apertura. Di particolare rilevanza non sono le dimensioni assolute dell'apertura, ma le sue dimensioni in rapporto alla lunghezza d'onda. Un'antenna singola (apertura spaziale continua), capace di fornire la richiesta risoluzione, viene generalmente impiegata solo per frequenze molto elevate, dove la lunghezza d'onda risulta sufficientemente piccola. Mentre quando si è interessati a segnali a frequenza minore, una schiera di sensori riesce spesso a sintetizzare meglio un'apertura spaziale.

Un secondo grande vantaggio che si ottiene ricorrendo agli array di sensori (valido questa volta ad ogni frequenza) è la versatilità del filtraggio spaziale offerta dal campionamento spaziale discreto. In molti settori applicativi è spesso necessario aggiornare la funzione di filtraggio spaziale in tempo reale, per mantenere efficace la soppressione dei segnali interferenti. Questo aggiornamento può essere implementato facilmente in un sistema campionato discretamente, cambiando semplicemente il modo in cui il beamformer combina linearmente i dati provenienti dai sensori. Non è invece possibile modificare la funzione di filtraggio spaziale di un'antenna ad apertura continua.

Sebbene lo studio del filtraggio spaziale possa essere in parte ricondotto allo studio del filtraggio temporale FIR, il beamforming a volte differisce significativamente da quest'ultimo. Per esempio, nel beamforming una sorgente di energia ha diversi parametri che la possono caratterizzare: distanza, angoli di azimuth ed elevazione, polarizzazione, contenuto spettrale. Segnali differenti, in genere, sono mutuamente correlati a causa della propagazione a cammini multipli. Il campionamento spaziale è spesso non uniforme e multidimensionale. Inoltre bisogna includere *incertezza* nella caratterizzazione della posizione e risposta dei singoli sensori. Queste considerazioni portano a sviluppare tecniche *robuste* di beamforming e tecniche di calibrazione degli array.

2.2 Concetti e terminologia di base

In questo paragrafo si introducono la terminologia ed i concetti che verranno impiegati in tutto il resto della trattazione. Nel primo sottoparagrafo si definiscono l'operazione di beamforming ed il filtraggio spaziale. Successivamente, si sviluppano le espressioni della matrice di covarianza dei dati e le differenze tra beamforming a banda stretta e beamforming a banda larga. Nell'ultima parte del paragrafo, si classificano i vari tipi di beamformers.

2.2.1 Beamforming e filtraggio spaziale

La Fig. 2.4 schematizza due beamformers.

Il primo effettua un campionamento spaziale dell'onda ed è tipicamente utilizzato per l'elaborazione di segnali a *banda stretta*. L'uscita y all'istante k è data dalla combinazione lineare dei dati provenienti dai J sensori:

$$y(k) = \sum_{j=1}^J w_j^* x_j(k) \quad (2.1)$$

dove * rappresenta l'operatore *complesso coniugato*. Sia i coefficienti sia i dati sono numeri complessi, in quanto per ogni sensore viene utilizzato un ricevitore in quadratura (demodulazione IQ).

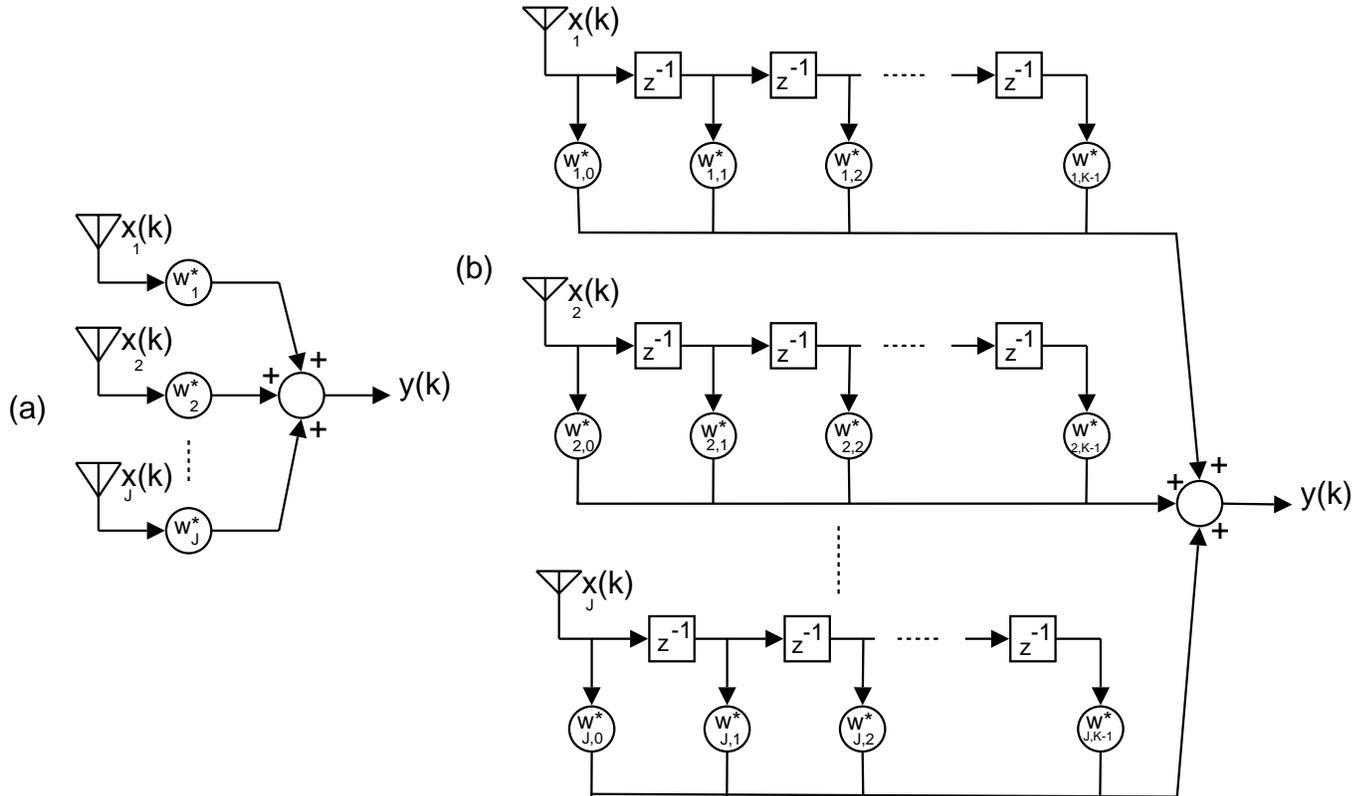


Figura 2.4: Un beamformer produce una combinazione lineare delle uscite dei sensori: (a) beamformer a banda stretta, (b) beamformer a banda larga.

Il secondo beamformer di Fig. 2.4 invece, effettua un campionamento sia nello spazio sia nel tempo e spesso viene utilizzato per i segnali a *banda larga*. In questo caso l'uscita y può essere espressa come:

$$y(k) = \sum_{j=1}^J \sum_{p=0}^{K-1} w_{j,p}^* x_j(k-p) \quad (2.2)$$

dove $K-1$ è il numero di ritardi presenti in ognuno dei J sensori (*canali*).

Se il segnale ad ogni sensore e' visto come un *ingresso*, allora un beamformer altro non è che un sistema *MISO* (*Multi Input Single Output*).

Si osservi come la 2.1 e la 2.2 possano essere riscritte in forma più compatta come:

$$y(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \quad (2.3)$$

purchè si definisca opportunamente un vettore di coefficienti (*pesi*) \mathbf{w} ed un vettore di dati $\mathbf{x}(k)$. H indica l'operatore *hermitiano* (trasposto coniugato). Supponendo che \mathbf{w} e $\mathbf{x}(k)$ siano N -dimensionali: si ha che $N = KJ$ quando ci si riferisce alla 2.2 ed $N = J$ quando ci si riferisce alla 2.1. Sottintendendo l'indice temporale k , la 2.3 può essere riscritta nella forma:

$$y = \mathbf{w}^H \mathbf{x} \quad (2.4)$$

Del resto, molte delle tecniche di beamforming descritte in questo capitolo sono applicabili sia al caso *tempo-continuo* che al caso *tempo-discreto*.

La *risposta in frequenza* di un filtro FIR con coefficienti w_p^* per $0 \leq p \leq J$ ed un ritardo di T secondi per coefficiente, è data da:

$$r(\omega) = \sum_{p=1}^J w_p^* e^{-j\omega T(p-1)} \quad (2.5)$$

che in forma compatta diventa:

$$r(\omega) = \mathbf{w}^H \mathbf{d}(\omega) \quad (2.6)$$

dove

$$\mathbf{w}^H = [w_1^* \quad w_2^* \quad \dots \quad w_J^*] \quad (2.7)$$

e

$$\mathbf{d}(\omega) = [1 \quad e^{(j\omega T)} \quad e^{(j2\omega T)} \quad \dots \quad e^{j(J-1)\omega T}]^H \quad (2.8)$$

$r(\omega)$ rappresenta la risposta del filtro spaziale ad una sinusoide complessa di frequenza ω mentre $\mathbf{d}(\omega)$ è un vettore che descrive la fase della sinusoide complessa ad ogni presa nel filtro FIR, relativamente alla fase del coefficiente w_1 , che viene presa a riferimento.

Analogamente, la *risposta del beamformer* sollecitata da un'onda piana è funzione della posizione e della frequenza. La posizione in genere, è una grandezza tridimensionale, ma spesso si ha che fare con *direzioni di arrivo* (DOA^2) di una o due dimensioni.

²Direction Of Arrival. Grandezza angolare che esprime la direzione di provenienza di un segnale.

Nel resto della trattazione non si terrà mai conto della distanza.

La Fig. 2.5 illustra il modo in cui un array di sensori campiona un segnale che si propaga nello spazio.

Si assuma che il segnale sia un'onda piana complessa, con DOA θ e frequenza ω . Si prenda come riferimento a fase nulla il segnale sul primo sensore. Questo implica che

$$x_1(k) = e^{j\omega k} \quad (2.9)$$

mentre

$$x_j(k) = e^{j\omega[k - \Delta_j(\theta)]} \quad (2.10)$$

per $2 \leq j \leq J$. $\Delta_j(\theta)$ rappresenta il ritardo temporale dovuto alla propagazione tra il primo sensore e il j -esimo.

Sostituendo nella 2.2, all'uscita del beamformer risulta

$$y(k) = e^{j\omega k} \sum_{j=1}^J \sum_{p=0}^{K-1} w_{j,p}^* e^{-j\omega[\Delta_j(\theta)+p]} = e^{j\omega k} r(\theta, \omega) \quad (2.11)$$

dove $\Delta_1(\theta) = 0$. $r(\theta, \omega)$ è la *risposta del beamformer* e può essere espressa comodamente in forma vettoriale come

$$r(\theta, \omega) = \mathbf{w}^H \mathbf{d}(\theta, \omega) \quad (2.12)$$

Gli elementi del vettore $\mathbf{d}(\theta, \omega)$ corrispondono agli esponenziali complessi $e^{-j\omega[\Delta_j(\theta)+p]}$ che in genere hanno la forma

$$\mathbf{d}(\theta, \omega) = [1 \quad e^{j\omega\tau_2(\theta)} \quad e^{j\omega\tau_3(\theta)} \quad \dots \quad e^{j\omega\tau_N(\theta)}]^H \quad (2.13)$$

dove i $\tau_i(\theta)$, per $2 \leq j \leq N$ sono i ritardi temporali dovuti alla propagazione.

$\mathbf{d}(\theta, \omega)$ è il *vettore risposta dell'array* denominato *steering vector* o *vettore direzionale*.

Le caratteristiche non ideali dei sensori possono essere inglobate in $\mathbf{d}(\theta, \omega)$, moltiplicando ogni salto di fase per una funzione $a_i(\theta, \omega)$ che descriva la risposta del sensore associato, in funzione della direzione e della frequenza temporale.

È possibile definire il *beampattern* come:

$$|r(\theta, \omega)|^2 \quad (2.14)$$

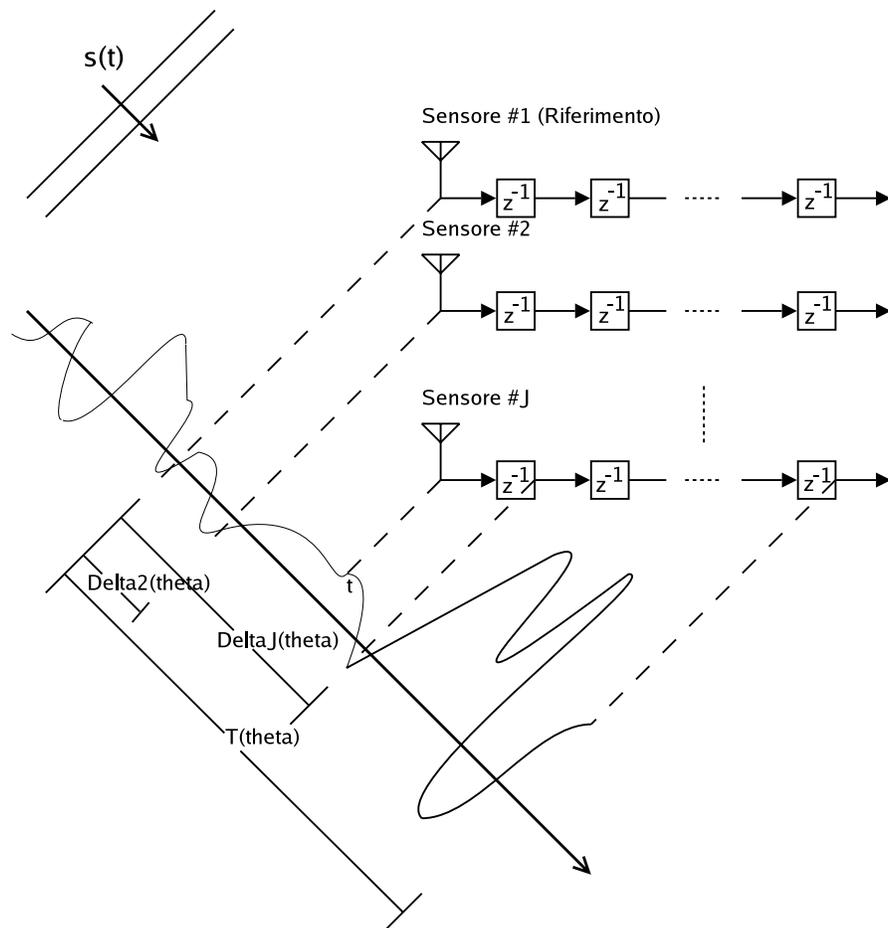


Figura 2.5: Un array dotato di celle di ritardo fornisce un campionamento spaziale e temporale del campo d'onda che si propaga.

Si osservi che ogni coefficiente di \mathbf{w} incide sia sulla risposta temporale del beamformer sia su quella spaziale. La tecnica FIR è sempre stata vista come uno strumento per ottenere, in funzione della frequenza, i coefficienti da assegnare ad ogni canale. Questa interpretazione è corretta ma poco precisa in un certo senso, dal momento che i coefficienti in ogni filtro influenzano anche le caratteristiche di filtraggio spaziale del beamformer. In un sistema MISO, il filtraggio spaziale e temporale che se ne origina è il risultato della mutua interazione tra il campionamento spaziale e il campionamento temporale.

La corrispondenza tra filtraggio FIR e beamforming è esatta solo quando il beamformer opera ad una singola frequenza ω_0 e la geometria dell'array è lineare ed equispaziata, come mostrato in Fig. 2.6.

Sia d la distanza reciproca tra i sensori, c la velocità di propagazione e θ la DOA relativa al versore laterale (ortogonale) all'array. Abbiamo che

$$\tau_i(\theta) = (i - 1)(d/c) \sin(\theta) \quad (2.15)$$

In questo caso identifichiamo la relazione tra la *frequenza temporale* ω in $\mathbf{d}(\omega)$ (filtro FIR) e la *direzione d'arrivo* θ in $\mathbf{d}(\theta, \omega_0)$ (beamformer) in

$$\omega = \omega_0(d/c) \sin(\theta) \quad (2.16)$$

Pertanto, la *frequenza temporale* in un filtro FIR corrisponde al *seno della direzione* in un beamformer lineare, equispaziato e a banda stretta. Una completa corrispondenza tra beamforming e metodi di filtraggio FIR è possibile solo per questo caso particolare, definita la corrispondenza tra frequenza e direzione.

La notazione vettoriale introdotta nella 2.12 suggerisce un'interpretazione geometrica per il beamforming. Questo punto di vista è utile sia per la sintesi sia per l'analisi. Il vettore dei coefficienti \mathbf{w} ed i vettori risposta dell'array $\mathbf{d}(\theta, \omega)$ sono contenuti in uno spazio N -dimensionale. Gli angoli tra \mathbf{w} e $\mathbf{d}(\theta, \omega)$ determinano la risposta $r(\theta, \omega)$. Per esempio, se per alcuni valori di (θ, ω) l'angolo tra \mathbf{w} e $\mathbf{d}(\theta, \omega)$ è 90° (cioè \mathbf{w} risulta ortogonale a $\mathbf{d}(\theta, \omega)$), allora la risposta è nulla. Se l'angolo invece è prossimo a 0° , allora il modulo della risposta sarà relativamente grande. L'abilità di risolvere spazialmente sorgenti a diverse posizioni e/o frequenze, per esempio (θ_1, ω_1) e (θ_2, ω_2) , dipende dall'angolo tra i vettori risposta, $\mathbf{d}(\theta_1, \omega_1)$ e $\mathbf{d}(\theta_2, \omega_2)$.

L'equivocazione spaziale corrisponde ad una ambiguità nelle posizioni delle sorgenti. Questo vuol dire che sorgenti a posizioni diverse generano lo stesso vettore di risposta dell'array, cioè per sorgenti a banda stretta si ha

$$\mathbf{d}(\theta_1, \omega_0) = \mathbf{d}(\theta_2, \omega_0) \quad (2.17)$$

Questo può succedere se i sensori vengono posizionati ad una distanza reciproca troppo elevata.

D'altra parte, se i sensori sono troppo vicini, ne viene a meno la risoluzione spaziale per la minore apertura che ne consegue, il ch  equivale a dire che i vettori risposta non sono ben distribuiti nello spazio vettoriale ad N -dimensioni. Un altro tipo di ambiguit  si ha per segnali a banda larga, quando una sorgente ad una certa posizione/frequenza non pu  essere distinta da una sorgente a posizione/frequenza diversa, cio  quando:

$$\mathbf{d}(\theta_1, \omega_1) = \mathbf{d}(\theta_2, \omega_2) \quad (2.18)$$

In un array lineare equispaziato ad esempio, questo capita ogniqualvolta si ha:

$$\omega_1 \sin(\theta_1) = \omega_2 \sin(\theta_2) \quad (2.19)$$

(Questa particolare ambiguit  pu  essere risolta andando a considerare anche altri campioni temporali).

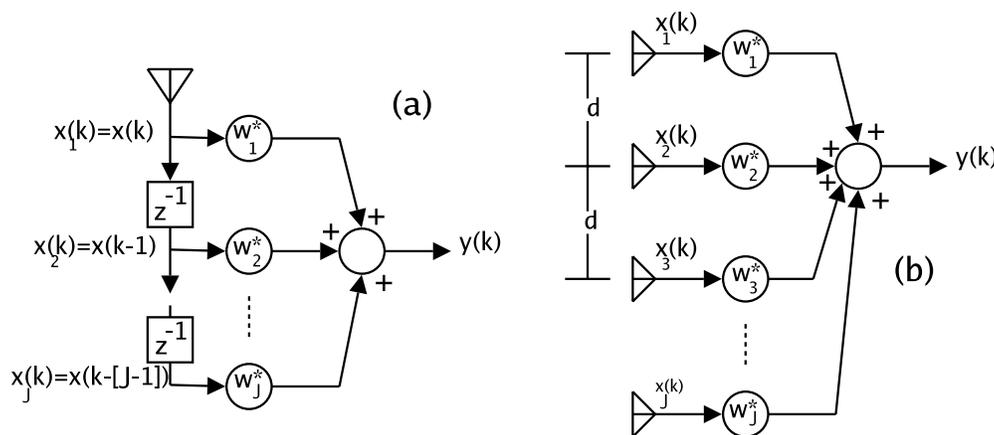


Figura 2.6: In questa figura viene illustrata l'analogia tra un filtro FIR ed un array lineare equispaziato, omnidirezionale ed a banda stretta.

Un punto fondamentale di questa trattazione   la sintesi della risposta dell'array mediante la scelta di opportuni coefficienti, sebbene la 2.12 affermi che la risposta   anche una funzione della geometria della schiera considerata (e delle caratteristiche del sensore, qualora non sia pi  valido il modello a sensore omnidirezionale ideale).

A differenza del filtraggio a canale unico dove i convertitori A/D forniscono un campionamento uniforme nel tempo, non c'  una motivazione particolare per pensare ad uno spaziamento uniforme tra i sensori. Anzi, l'allocazione dei sensori fornisce un'ulteriore grado di libert  nella sintesi della risposta desiderata e pu  essere sfruttata in modo tale che in un range (θ, ω) di interesse, i vettori risposta dell'array non siano ambigui e siano ben distribuiti nello spazio vettoriale N -dimensionale. Lo sfruttamento di questo grado di libert  pu  diventare complicato a causa della natura multidi-

mensionale del campionamento spaziale e della relazione non lineare tra $r(\theta, \omega)$ e le posizioni dei sensori.

2.2.2 Operatori statistici del secondo ordine

La valutazione delle prestazioni di un beamformer generalmente coinvolge la potenza o la varianza, pertanto gli operatori statistici del secondo ordine giocano un ruolo fondamentale.

Si supponga (senza perdere di generalità) che i dati forniti dai sensori siano a media nulla. La varianza (o potenza attesa) all'uscita del beamformer è data da

$$E[|y|^2] = \mathbf{w}^H E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \mathbf{w} \quad (2.20)$$

Se i dati sono *stazionari in senso lato*, la matrice di covarianza

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] \quad (2.21)$$

è indipendente dal tempo.

Sebbene nella pratica si abbia frequentemente a che fare con fenomeni non stazionari, l'ipotesi di stazionarietà in senso lato viene spesso adottata per sviluppare beamformers ottimi in senso statistico.

Si supponga che \mathbf{x} rappresenti una sequenza di valori campionati uniformemente nel tempo, avente densità spettrale di potenza $S(\omega)$ e che tale densità sia nulla oltre la banda $[\omega_a, \omega_b]$. $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ può essere espressa in funzione della densità spettrale di potenza dei dati mediante la trasformata di Fourier:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} S(\omega) \mathbf{d}(\omega) \mathbf{d}^H(\omega) d\omega \quad (2.22)$$

con $\mathbf{d}(\omega)$ definito come nella 2.8.

Supponendo che il vettore di dati \mathbf{x} sia quello generato da una sorgente posta in direzione θ , in modo analogo alle sequenze temporali, possiamo ricavare la matrice di covarianza del vettore di dati come:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} S(\omega) \mathbf{d}(\theta, \omega) \mathbf{d}^H(\theta, \omega) d\omega. \quad (2.23)$$

Una sorgente si dice a banda stretta (e a frequenza ω_0) se $\mathbf{R}_{\mathbf{x}}$ può essere riscritta come

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}} = \sigma_s^2 \mathbf{d}(\theta, \omega_0) \mathbf{d}^H(\theta, \omega_0) \quad (2.24)$$

dove σ_s^2 è la varianza (o la potenza) della sorgente.

Le condizioni sotto le quali una sorgente può essere considerata a banda stretta o meno dipendono sia dalla banda della sorgente sia dalla durata temporale dell'osservazione. Per illustrare meglio questo concetto, si immagina di osservare sullo schermo di un oscilloscopio una sinusoide modulata in ampiezza o l'uscita di un filtro a banda stretta pilotato da rumore bianco. Se l'estensione spettrale del segnale è piccola in rapporto alla frequenza centrale (cioè se ha una banda frazionale stretta) e gli intervalli temporali nei quali il segnale viene osservato sono brevi rispetto all'inverso della banda del segnale, ogni forma d'onda osservata avrà l'andamento di una sinusoide. Si osservi che se l'intervallo di osservazione temporale viene aumentato, la banda del segnale deve diminuire per conservare l'aspetto sinusoidale. Ne risulta che il prodotto tempo-banda ($TBWP^3$) è il parametro fondamentale per capire quando una sorgente può essere considerata a banda stretta o meno.

Un array fornisce un'efficace apertura temporale nella quale la sorgente viene osservata. La Fig. 2.5 illustra questa apertura temporale $T(\theta)$ per una sorgente proveniente dalla direzione θ . Chiaramente il TBWP dipende dalla DOA della sorgente. Un array viene considerato a banda stretta se il TBWP d'osservazione è molto minore di ciascuna delle possibili direzioni di provenienza delle sorgenti.

Il beamforming a banda stretta è concettualmente più semplice di quello a banda larga dal momento che è possibile ignorare la variabile *frequenza temporale*. Questo fatto, in aggiunta all'interesse di certe applicazioni per la frequenza temporale, ha motivato l'implementazione di beamformers a larga banda con una struttura a scomposizione in sottobande, come illustrato in Fig. 2.7. La scomposizione in sottobande viene spesso realizzata prendendo la trasformata discreta di Fourier (DFT) dei dati in uscita dai sensori.

Per ogni frequenza di interesse, i dati dell'array vengono processati dal beamformer corrispondente. Questo metodo viene spesso chiamato *beamforming in frequenza*. Le uscite del beamformer in frequenza possono essere pensate equivalenti alla DFT dell'uscita del beamformer a larga banda schematizzato in Fig. 2.4b mediante una scelta opportuna dei coefficienti ed un'attenta ripartizione dei dati. Questa equivalenza corrisponde all'implementazione dei filtri FIR mediante convoluzione circolare con la DFT.

2.2.3 Classificazione dei beamformers

I beamformer possono essere classificati in beamformers *data-independent* e beamformers *ottimi in senso statistico*, a seconda del criterio con il quale vengono scelti i coefficienti \mathbf{w} .

In un beamformer data-independent, i coefficienti non dipendono dai dati e vengono scelti per presentare a priori una risposta dell'array all'intero scenario di segnale+interferenze.

In un beamformer ottimo in senso statistico invece, i coefficienti vengono scelti in base alla statistica dei dati, cercando di *ottimizzare* la risposta dell'array.

In genere, un beamformer ad ottimo statistico piazza gli zeri della funzione $\mathbf{d}(\theta, \omega)$ in direzione delle sorgenti di interferenze, nel tentativo di massimizzare il rapporto segnale/rumore alla sua uscita.

³Time BandWidth Product.

Le tecniche di sintesi dei beamformers data-independent vengono poi spesso usate nel beamforming ad ottimo statistico (ad esempio nel *Minimum Variance Beamformer*, *MVB*).

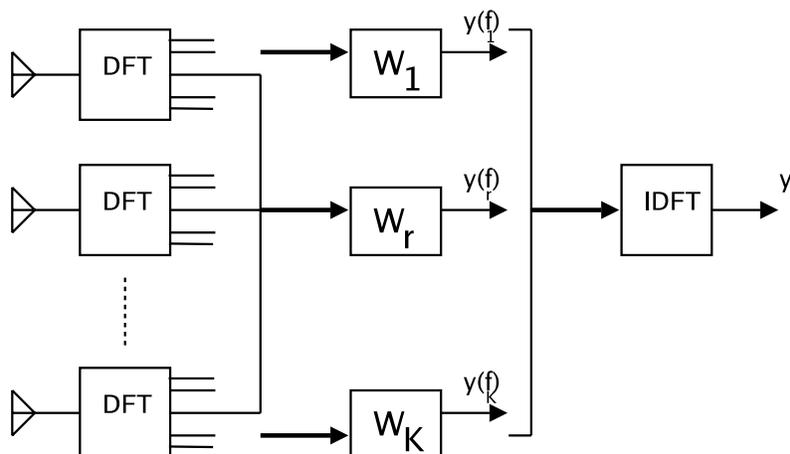


Figura 2.7: Talvolta, il beamforming viene eseguito nel dominio delle frequenze, specie quando si ha a che fare con segnali a banda larga.

In genere non è nota la statistica della sequenza di dati, ed oltretutto questa può cambiare nel tempo, perciò, tipicamente, si impiegano algoritmi *adattativi* per la scelta dei coefficienti.

L'algoritmo adattativo viene progettato affinché la risposta del beamformer converga ad una soluzione statisticamente ottima.

I beamformer *parzialmente adattativi* riescono a ridurre il carico computazionale dell'algoritmo adattativo a spese di una (piccola) perdita di ottimalità statistica.

2.3 Beamforming data-independent

In un beamformer data-independent i coefficienti vengono scelti affinché la risposta del beamformer approssimi una risposta desiderata nota a priori, *indipendentemente dalla sequenza di dati o dalla statistica degli stessi*. Questo obiettivo progettuale è lo stesso che si incontra nella progettazione classica dei filtri FIR. Dove possibile esploreremo le analogie tra il beamforming e il filtraggio FIR, per cercare di comprendere meglio i problemi di progettazione e le procedure di sintesi. Discuteremo anche problemi di design specifici del beamforming. La prima parte di questo paragrafo tratta la costruzione di beams in senso classico, cioè approssimando una risposta massima nella direzione desiderata e nulla altrove. Nella seconda parte vengono poi presentati metodi più generali per la progettazione di beamformers aventi forme di risposta desiderata del tutto arbitrarie.

2.3.1 Beamforming classico

Si consideri il problema di separare una singola componente a frequenza complessa dalle altre utilizzando un filtro FIR a J ingressi come illustrato in Fig. 2.6. Se ci interessa la frequenza ω_0 , la risposta in frequenza desiderata è unitaria a frequenza ω_0 e nulla altrove. *Una soluzione comune a questo problema consiste nel prendere il vettore $\mathbf{d}(\omega_0)$ come vettore \mathbf{w} .* Si può dimostrare che questa è la scelta ottima in termini di minimizzazione dell'errore quadratico tra la risposta effettiva e quella ideale. La risposta effettiva è caratterizzata da un lobo principale (*main lobe*), detto anche *beam* e da molti lobi secondari (*sidelobes*).

Dal momento che

$$\mathbf{w} = \mathbf{d}(\omega_0) \quad (2.25)$$

ciascun elemento di \mathbf{w} ha modulo unitario. È quindi possibile finestrare il vettore \mathbf{w} (modificando le ampiezze dei suoi elementi) per ottenere il migliore compromesso tra i livelli del lobo principale e dei lobi laterali. Sia \mathbf{T} una matrice diagonale $J \times J$ che abbia per traccia i coefficienti della finestra, si ottiene che il vettore dei coefficienti del filtro FIR è dato da $\mathbf{T}\mathbf{d}(\omega)$.

Nel filtraggio spaziale si è spesso interessati a ricevere un segnale proveniente da una certa direzione nota θ_0 . Se si suppone che il segnale sia a banda stretta (a frequenza ω_0), una scelta tipica per il vettore dei coefficienti è il vettore risposta dell'array $\mathbf{d}(\theta_0, \omega_0)$. L'array/beamformer che ne risulta viene detto *array rifasato* dal momento che l'uscita di ogni sensore viene sfasata prima della somma. La Fig. 2.2 rappresenta l'ampiezza della risposta effettiva quando $\mathbf{w} = \mathbf{d}(\theta_0, \omega_0)$. Come per il filtro FIR discusso sopra, la larghezza del beam ed il livello dei lobi secondari sono le caratteristiche importanti della risposta. Il finestramento può essere sfruttato per controllare la forma della risposta, cioè per formare il beam. In Fig. 2.10 viene riportata la risposta di un beamformer puntato a $+20^\circ$ con finestramento di Hamming, mentre nelle Figg. 2.8 e 2.9 vengono mostrati i valori dei corrispondenti coefficienti in modulo e fase.

L'equivalenza tra array lineari equispaziati a banda stretta ed i filtri FIR (vedi Fig. 2.6) implica che le stesse tecniche per la scelta delle finestre sono applicabili ad entrambi i problemi⁴. Se l'array è a banda stretta e i sensori giacciono su una retta, possono essere usati i metodi che derivano dal progetto delle aperture spaziali continue.

Se l'array è *planare e separabile*, allora tecniche per gli array lineari possono essere usate per sintetizzare la risposta complessiva 2D, come prodotto delle risposte di due array lineari. Un array planare nel piano \mathbf{xy} si dice *separabile* se la sua risposta può essere scomposta nel prodotto delle risposte di array lineari posti in direzione \mathbf{x} e \mathbf{y} . La risposta può essere sintetizzata come il prodotto di array lineari posti in direzione \mathbf{x} e \mathbf{y} .

Se il beamformer è a banda larga ed impiega filtri FIR, allora il finestramento può essere applicato indipendentemente sia alle uscite dei sensori che alle prese dei filtri FIR, come illustrato in Fig.

⁴Esistono anche metodi di finestramento per configurazioni di array più complesse.

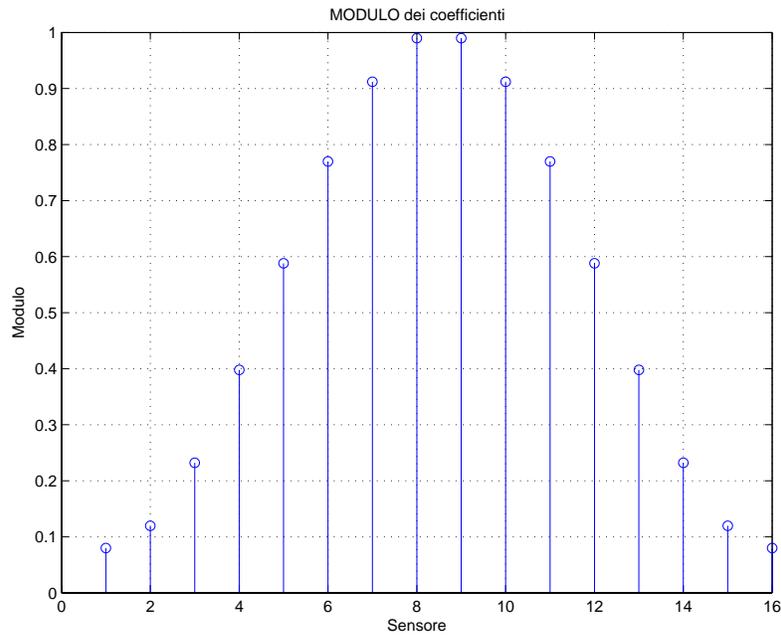


Figura 2.8: Andamento in MODULO dei coefficienti di un beamformer con finestra di Hamming. Il puntamento è a $+20^\circ$ ma questa informazione non può essere dedotta da questa figura.

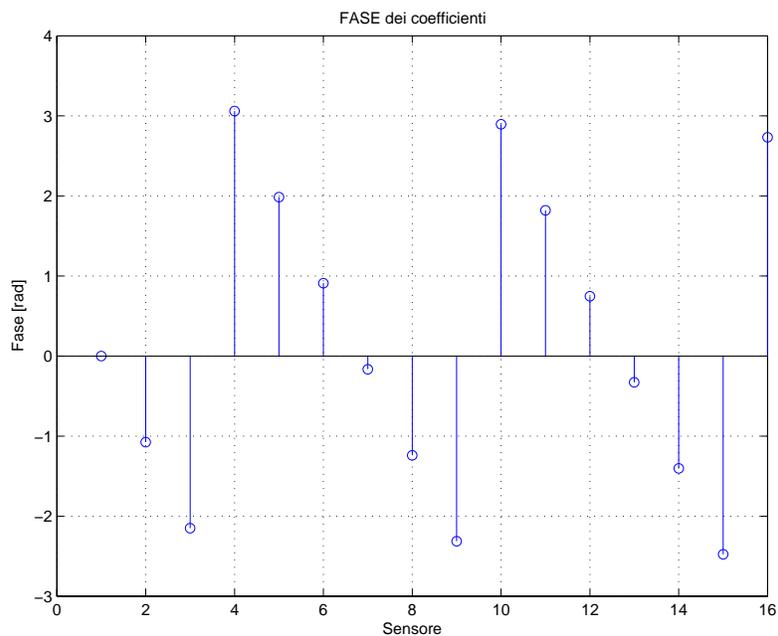


Figura 2.9: Andamento in FASE dei coefficienti di un con finestra di Hamming. Il puntamento è a $+20^\circ$. I coefficienti presentano uno sfasamento lineare precalcolato affinché il beamformer punti nella direzione desiderata.

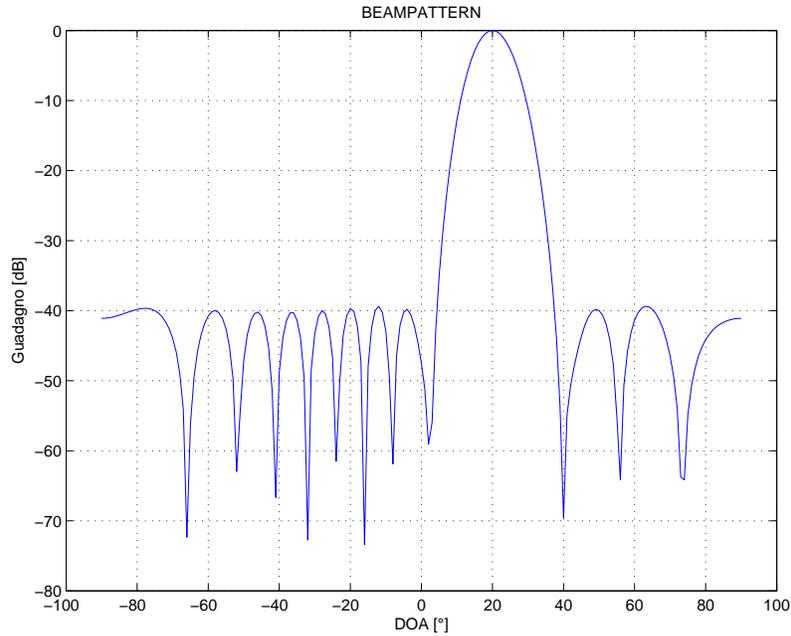


Figura 2.10: Beamformer ottenuto con i coefficienti mostrati nelle figure precedenti. la finestra di Hamming applicata al modulo dei coefficienti ha abbassato notevolmente l'effetto dei lobi secondari, mentre la loro fase determina la direzione di puntamento di $+20^\circ$.

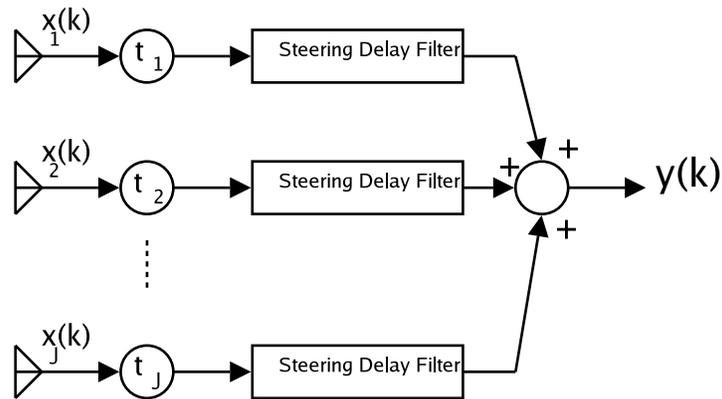


Figura 2.11: Questa figura mostra un classico beamformer a larga banda. Nel beamforming classico i coefficienti (t_1, t_2, \dots, t_J) vengono usati per plasmare il beampattern. Per orientare un array a banda larga, si usano dei filtri per compensare i ritardi di propagazione della sorgente desiderata.

2.11.

I pesi vengono scelti per plasmare la risposta spaziale ed i coefficienti dei filtri FIR per presentare una desiderata risposta temporale. Come detto nel paragrafo 2.2, le risposte spaziale e temporale interagiscono cosicchè le risposte in tempo e frequenza non possono essere sintetizzate in modo totalmente indipendente.

Un esempio di impiego della struttura di Fig. 2.11 è il beamforming per somma e ritardi. In tal caso, i filtri FIR approssimano i ritardi di propagazione (fase lineare sulla banda di frequenze di interesse) ed i pesi per il finestramento vengono scelti per formare il main beam e la struttura dei lobi secondari nella risposta spaziale.

2.3.2 Beamforming data-independent generalizzato

I metodi discussi in questo paragrafo si applicano alla progettazione di beamformers che approssimano una risposta desiderata del tutto arbitraria. Questo è interessante per diversi aspetti. Per esempio, si potrebbe desiderare di ricevere ogni segnale proveniente in un certo range di direzioni, in tal caso la risposta desiderata è unitaria nell'intero range. Si potrebbe sapere a priori che è presente una forte sorgente di interferenza che arriva da una certo range di direzioni, in tal caso la risposta desiderata è nulla nel range considerato.

Questi esempi sono analoghi al filtraggio FIR passa-banda e arresta-banda.

Sebbene in questo caso non si tratti più esattamente di beamforming, è prassi comune riferirsi ancora a questo tipo di filtraggio spaziale come ad un beamforming.

Si consideri la scelta di \mathbf{w} tale che la risposta effettiva

$$r(\theta, \omega) = \mathbf{w}^H \mathbf{d}(\theta, \omega) \quad (2.26)$$

approssimi la risposta desiderata $r_d(\theta, \omega)$. Per la scelta di \mathbf{w} possono essere impiegate tecniche ad hoc, simili a quelle impiegate nella progettazione dei filtri FIR; tuttavia qui si prende in considerazione solo la scelta di \mathbf{w} che minimizza la norma pesata L_p :

$$L_p = \left(\int \int |r(\theta, \omega) - r_d(\theta, \omega)|^p d\theta d\omega \right)^{1/p} \quad (2.27)$$

della differenza tra la risposta desiderata e la risposta effettiva. L'approssimazione a L_p pesata è utilizzata in diverse tecniche di progettazione dei filtri FIR. Le norme più comunemente utilizzate sono L_∞ (minmax) e L_2 (Least Square).

Tecniche specifiche prevedono:

1. Finestramento della risposta impulsiva ideale (minimizzazione della norma L_2 con ω continua).
2. Minimi quadrati con campionamento della risposta in frequenza e pesatura lineare (minimizzazione della norma L_2 con ω discreta)

3. Tecnica minmax con algoritmo di Remez (minimizzazione della norma L_∞ con ω discreta)
4. Tecnica minmax complessa e progettazione della risposta in modulo (minimizzazione della norma L_∞ con ω discreta)

La progettazione di un filtro FIR corrisponde ad un problema di approssimazione polinomiale, dal momento che la risposta in frequenza 2.6 è la trasformata di Fourier discreta della sequenza dei coefficienti del filtro FIR. Diversi dei metodi sopracitati sfruttano questa struttura polinomiale.

Ad esclusione del caso per il quale la progettazione del beamformer può essere ridotta a geometrie di array lineari equispaziati, la progettazione del beamformer non è un'approssimazione del problema polinomiale.

In generale, la risposta in 2.12 è una somma pesata di esponenziali elevati a potenze non intere. Pertanto, i metodi (3) e (4) basati su L_∞ non sono applicabili, dal momento che si basano sul teorema delle alternanze per approssimazioni polinomiali. Il metodo delle finestre (1) è basato sulla trasformata di Fourier tempo-discreta ed anch'essa non è applicabile. In genere è applicabile la procedura con L_2 , che usa i minimi quadrati pesati linearmente (2).

Per illustrare la progettazione dei beamformer data-independent mediante ottimizzazione di L_2 , si consideri il caso di dover minimizzare l'errore quadratico tra la risposta effettiva e la risposta desiderata in P punti (θ_i, ω_i) , $1 \leq i \leq P$. Se $P > N$ allora otteniamo un problema ai minimi quadrati sovradeterminato

$$\min_{\mathbf{w}} |\mathbf{A}^H \mathbf{w} - \mathbf{r}_d|^2 \quad (2.28)$$

dove

$$\mathbf{A} = [\mathbf{d}(\theta_1, \omega_1) \quad \mathbf{d}(\theta_2, \omega_2) \quad \dots \quad \mathbf{d}(\theta_P, \omega_P)];$$

$$\mathbf{r}_d = [r_d(\theta_1, \omega_1) \quad r_d(\theta_2, \omega_2) \quad \dots \quad r_d(\theta_P, \omega_P)]^H$$

Purchè $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ sia invertibile (cioè che \mathbf{A} abbia rango massimo), la soluzione della 2.28 è data da

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^+ \mathbf{r}_d \quad (2.29)$$

dove

$$\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}\mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{A} \quad (2.30)$$

è la pseudo-inversa di \mathbf{A} .

A questo punto occorre fare una precisazione. Il *guadagno di rumore bianco* di un beamformer è definito come la potenza che si ha all'uscita del beamformer quando all'ingresso dei sensori è presente del rumore bianco di potenza unitaria. Pertanto, la norma al quadrato del vettore dei pesi $\mathbf{w}^H \mathbf{w}$

rappresenta il guadagno di rumore bianco. Se il guadagno di rumore bianco è elevato, l'accuratezza con cui \mathbf{w} approssima la risposta desiderata è argomento di discussione, dal momento che l'uscita del beamformer avrà uno scarso SNR dovuto ai contributi di rumore bianco. La matrice \mathbf{A} si dice *malcondizionata* quando le dimensioni numeriche dello spazio esplorato da $\mathbf{d}(\theta_i, \omega_i)$ per $1 \leq i \leq P$ sono minori di N . Se \mathbf{A} è malcondizionata, allora \mathbf{w} può avere una norma molto elevata e può ancora approssimare la risposta desiderata. Per esempio, se viene campionata solo una direzione sorgente, allora il rango di \mathbf{A} è dato approssimativamente dal TBWP per quella direzione. Approssimazioni a basso rango di \mathbf{A} e \mathbf{A}^+ dovrebbero essere utilizzate qualora il rango sia minore di N . Questo assicura che la norma di \mathbf{w} non sia inutilmente elevata.

Specifiche direzioni e frequenze possono essere enfatizzate nella 2.28 scegliendo punti campione (θ_i, ω_i) e/o pesando diversamente l'errore per ogni (θ_i, ω_i) ma in genere, purtroppo, non sono disponibili delle linee guida per la scelta della pesatura degli errori e di (θ_i, ω_i) .

2.3.3 Confronto tra i metodo classico e metodo generalizzato

Nel caso di beamforming deterministico possono essere impiegati il metodo *classico* od il metodo *generalizzato* a seconda che siano disponibili o meno le DOA delle RFI principali. In ogni caso, si suppone che la direzione di provenienza del segnale desiderato sia sempre nota a priori, ovvero che si conosca sempre in che direzione puntare il main beam per osservare la radiosorgente. Si suppone inoltre che tale informazione (espressa anch'essa in forma angolare) venga fornita dall'esterno, da un sistema di puntamento appositamente concepito. La Tab. 2.2 ricapitola la situazione per il beamforming deterministico.

Beamforming: DETERMINISTICO		
Livello: RF		
DOA NOTE	METODO	FUNZIONAMENTO
Segnale desiderato	CLASSICO	La fase dei coefficienti viene calcolata in modo che il main beam punti nella direzione voluta.
Segnale desiderato + RFI	GENERALIZZATO	I coefficienti vengono determinati affinché il beampattern presenti il suo massimo in direzione del segnale desiderato ed uno zero in direzione delle RFI.

Tabella 2.2: Situazione per il beamforming deterministico.

2.4 Beamforming ad ottimo statistico

Nel beamforming ad ottimo statistico i coefficienti sono scelti in base alla statistica dei dati ricevuti dall'array. L'obiettivo è *ottimizzare* la risposta del beamformer affinché l'uscita contenga il minimo contributo dovuto al rumore ed ai segnali provenienti da direzioni diverse da quelle del segnale desiderato. In Tab. 2.3 si riportano criteri differenti per la scelta statisticamente ottima dei coefficienti del beamformer. Dove possibile sono stati ricapitolate le equazioni ed i coefficienti che descrivono il criterio corrispondente. Per tutto il paragrafo supporremo che i dati siano stazionari in senso lato e che i corrispondenti descrittori statistici del secondo ordine siano noti. La determinazione dei coefficienti quando la statistica dei dati non è nota a priori, oppure è tempo-variante viene discussa nel paragrafo successivo, dedicato agli algoritmi adattativi.

	MSC	REF SIGNAL	max SNR	LCMV
Definizioni	x_a : dati ausiliari y_m : dati primari $r_{ma} = E[x_a y_m^*]$ $R_a = E[x_a x_a^H]$ uscita: $y = y_m - w_a^H x_a$	x : array dei dati y_d : segnale desiderato $r_{xd} = E[x y_d^*]$ $R_x = E[x x^H]$ uscita: $y = w^H x$	$x = s + n$: array dei dati s : componente di segnale n : componente di rumore $R_s = E[s s^H]$ $R_n = E[n n^H]$ uscita: $y = w^H x$	x : array dei dati C : matrice dei vincoli f : vettore risposta $R_x = E[x x^H]$ uscita: $y = w^H x$
Criterio	$\min_{w_a} E[y_m - w_a^H x_a ^2]$	$\min_w E[y - y_d ^2]$	$\max_w \frac{w^H R_s w}{w^H R_n w}$	$\min_w w^H R_x w$ s.v. $C^H w = f$
Coeff. ottimi	$w_a = R_a^{-1} r_{ma}$	$w = R_x^{-1} r_{xd}$	$R_n^{-1} R_s w = \lambda_{max} w$	$w = R_x^{-1} C [C^H R_x^{-1} C]^{-1} f$
Vantaggi	Semplice	La DOA del segnale desiderato può non essere nota	Vera massimizzazione dell'SNR	Flessibile, vincoli arbitrari
Svantaggi	Richiede l'assenza del segnale desiderato dai canali ausiliari per la determinazione dei pesi	Occorre generare il segnale di riferimento	Bisogna conoscere R_s e R_n e risolvere il problema generalizzato agli autovalori	Calcolo del vettore vincolato dei coeff.

Tabella 2.3: Schema riassuntivo dei beamformers ad ottimo statistico.

2.4.1 Multiple Sidelobe Canceller (MSC)

L'MSC dal punto di vista storico è il primo beamformer ad ottimo statistico. Un MSC consiste in un *canale principale* ed uno o più *canali ausiliari*, come schematizzato in Fig. 2.12a. Il canale principale può essere sia un'antenna singola ad alto guadagno che un beamformer data-independent. Ha una risposta altamente direttiva puntata nella direzione del segnale desiderato. Si suppone inoltre che i segnali interferenti entrino attraverso i lobi laterali del canale principale e attraverso i canali ausiliari. L'obiettivo è scegliere i coefficienti da attribuire al canale ausiliario in modo tale da cancellare la componente interferente dal canale principale. Questo implica che la risposta agli interferenti del canale principale e di una combinazione lineare dei canali ausiliari deve essere identica. Il sistema complessivo ha poi una risposta di zeri come in Fig. 2.12b.

In generale non è nè possibile, nè auspicabile, allineare uno zero in corrispondenza di ogni segnale interferente, dal momento che ne può risultare un notevole incremento di guadagno di rumore bianco. Ne consegue che i coefficienti vengono scelti come compromesso tra un alto livello di soppressione

delle interferenze ed un basso guadagno di rumore bianco, minimizzando il valore atteso della potenza complessiva in uscita (come indicato in Tab. 2.3).

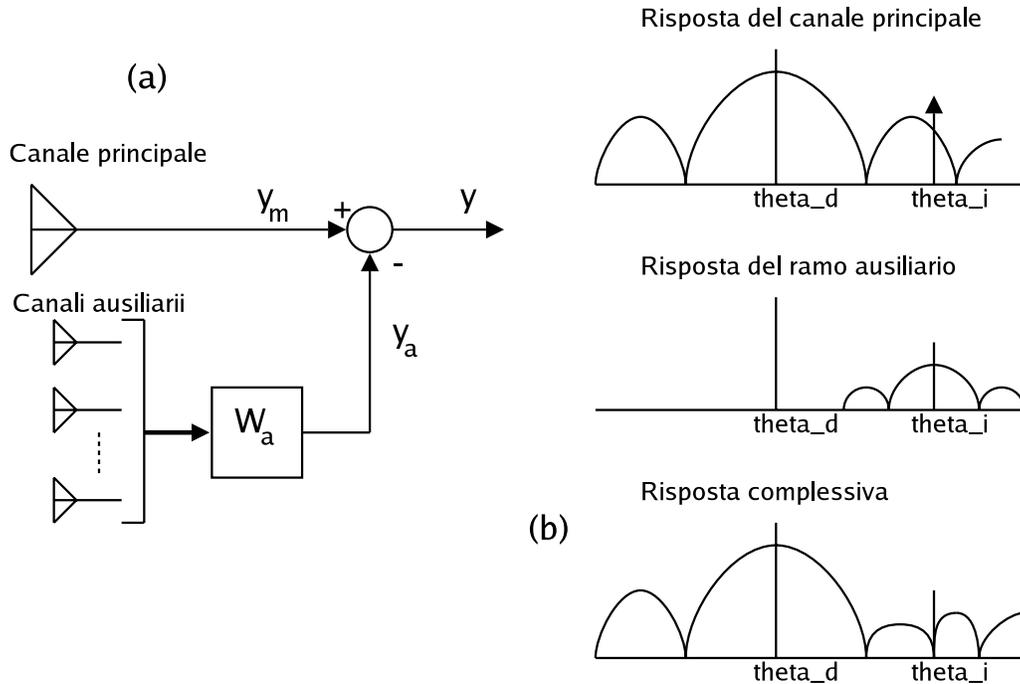


Figura 2.12: L'MSC consiste di un canale principale e diversi canali ausiliari. I coefficienti del ramo ausiliario vengono scelti per cancellare le interferenze che entrano attraverso i lobi secondari della risposta del canale principale.

La scelta dei coefficienti per minimizzare la potenza in uscita può causare una cancellazione del segnale desiderato, dal momento che anch'esso contribuisce alla potenza complessiva d'uscita. Infatti, al crescere della potenza del segnale desiderato, questo contribuisce per una frazione sempre maggiore della potenza complessiva in uscita e la cancellazione percentuale aumenta.

L'MSC è molto comodo nelle applicazioni dove il segnale desiderato è molto debole (in rapporto alle interferenze), come in radioastronomia, dal momento che verrà completamente ignorato dai coefficienti ottimi. Oppure quando il segnale desiderato è assente durante periodi di tempo noti: quando i coefficienti possono essere adattati in assenza del segnale desiderato e usati poi in presenza del segnale stesso.

2.4.2 Utilizzo di un segnale di riferimento

Questo metodo non è applicabile alla radioastronomia ma viene comunque riportato in quanto risulta interessante ed applicabile in ambiti ordinari (quali la telefonia mobile).

Se il segnale desiderato fosse noto, i coefficienti potrebbero essere scelti per minimizzare l'errore tra l'uscita del beamformer ed il segnale desiderato. Chiaramente, la conoscenza del segnale desiderato

rende effettivamente inutile l'uso del beamforming. Tuttavia, per certe applicazioni, potrebbe essere sufficientemente nota l'informazione sul segnale desiderato da generare un segnale che lo rappresenti piuttosto bene. Questo segnale è detto *segnale di riferimento*. Come indicato in Tab. 2.3, i coefficienti vengono scelti per minimizzare l'errore quadratico medio tra l'uscita del beamformer ed il segnale di riferimento.

Il vettore dei coefficienti dipende dalla cross-covarianza tra il segnale desiderato presente in x e il segnale di riferimento. Si ottengono prestazioni accettabili purchè questo approssimi con se stesso la covarianza del segnale desiderato (e non noto). Per esempio, se il segnale desiderato è modulato in ampiezza, allora prestazioni accettabili spesso si ottengono prendendo come segnale di riferimento la portante. Si assume inoltre che il segnale di riferimento sia incorrelato con i segnali interferenti presenti in x . Il fatto che non sia necessario conoscere la direzione di arrivo del segnale desiderato è una caratteristica che distingue questo metodo.

2.4.3 Massimizzazione del Rapporto Segnale Rumore (max SNR)

In questo metodo i coefficienti sono scelti per massimizzare direttamente il rapporto segnale rumore, come indicato in Tab. 2.3. Una soluzione generale per il calcolo dei coefficienti richiede la conoscenza di entrambe le matrici di covarianza del segnale \mathbf{R}_s e del rumore \mathbf{R}_n . La disponibilità di questa informazione a priori dipende dall'applicazione in esame (la natura incognita di \mathbf{R}_s nel caso radioastronomico scoraggia l'uso di questo metodo). Per esempio, in un sistema radar attivo \mathbf{R}_n può essere stimata durante il tempo in cui non viene trasmesso alcun segnale, mentre \mathbf{R}_s può essere ottenuta dalla conoscenza dell'impulso trasmesso e dalla direzione di interesse.

Se la componente di segnale è a banda stretta, a frequenza ω_0 e direzione θ , allora dai risultati del paragrafo 2.2 si ricava

$$\mathbf{R}_s = \sigma^2 \mathbf{d}(\theta, \omega) \mathbf{d}^H(\theta, \omega) \quad (2.31)$$

In questo caso i coefficienti si ottengono da

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}(\theta, \omega) \quad (2.32)$$

dove α è una generica costante complessa non nulla.

In ogni caso la sostituzione della 2.32 nell'espressione dell'SNR mostra che l'SNR è indipendente dal valore scelto per α .

2.4.4 Linearly Constrained Minimum Variance Beamforming (LCMV)

In alcune applicazioni nessuno degli approcci visti precedentemente potrebbe risultare soddisfacente. Il segnale desiderato, ad esempio, potrebbe essere di potenza sconosciuta o potrebbe essere sempre

presente, questo comporterebbe una cancellazione del segnale nel MSC oppure una difficoltà nella stima delle matrici di covarianza di segnale e rumore nel metodo del massimo SNR.

Questi limiti possono essere superati attraverso l'applicazione di *vincoli lineari* sul vettore dei coefficienti.

L'utilizzo di vincoli lineari è un approccio generale che permette un controllo esteso sulla risposta adattata del beamformer. In questo paragrafo si illustra come vincoli lineari possano essere impiegati per controllare la risposta del beamformer, si discute il problema del beamforming ottimo linearmente vincolato e si presenta la struttura del *generalized sidelobe canceller (GSC)*.

L'idea alla base del LCMV beamforming consiste nell'esprimere dei vincoli sulla risposta del beamformer, cosicché i segnali provenienti dalle direzioni di interesse vengano lasciati passare con certe fasi e certi guadagni. I coefficienti vengono scelti per minimizzare la potenza (o la varianza) in uscita, sotto certi vincoli della risposta. Questo ha l'effetto di preservare il segnale desiderato e contemporaneamente di minimizzare i contributi all'uscita dovuti al rumore e ai segnali interferenti provenienti da direzioni diverse da quella di interesse. Nella nostra analogia il filtro FIR ha i coefficienti scelti in modo da minimizzare la potenza in uscita dal filtro sotto il vincolo che la risposta del filtro a segnali di frequenza ω_0 sia unitaria.

Nel paragrafo 2.2 si è messo in evidenza che la risposta del beamformer ad una sorgente con DOA θ e frequenza temporale ω è data dalla 2.26. Vincolando linearmente i coefficienti a soddisfare

$$\mathbf{w}^H \mathbf{d}(\theta, \omega) = g \quad (2.33)$$

dove g è una costante complessa, si garantisce che qualunque segnale proveniente da un angolo θ con frequenza ω si ritrovi in uscita con risposta g . La minimizzazione dei contributi delle interferenze (segnali che non arrivano da θ ma con frequenza ω) viene ottenuta scegliendo i coefficienti in modo tale da minimizzare il valore atteso della potenza (o varianza) in uscita:

$$E[|y|^2] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (2.34)$$

Il problema LCMV per la scelta dei coefficienti viene pertanto ridefinito come la ricerca del

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H \mathbf{R}_x \mathbf{w} \quad (2.35)$$

sotto il vincolo

$$\mathbf{d}^H(\theta, \omega) \mathbf{w} = g^* \quad (2.36)$$

Per risolvere la 2.35 con la 2.36 si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, ottenendo il risultato fondamentale

$$\mathbf{w} = g^* \frac{\mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{d}(\theta, \omega)}{\mathbf{d}^H(\theta, \omega) \mathbf{R}_x^{-1} \mathbf{d}(\theta, \omega)} \quad (2.37)$$

Si noti che nella pratica, la presenza di rumore incorrelato assicura l'invertibilità di \mathbf{R}_x .

Se $g = 1$ la 2.37 viene spesso chiamata *Minimum Variance Distorsionless Response beamformer (MVDR)*.

Si può dimostrare che la 2.37 è equivalente alla soluzione con massimo SNR data in 2.32, sostituendo

$$\sigma^2 \mathbf{d}(\theta, \omega) \mathbf{d}^H(\theta, \omega) + \mathbf{R}_n \quad (2.38)$$

ad \mathbf{R}_x nella 2.37 e applicando le proprietà delle matrici inverse.

Il singolo vincolo lineare espresso in 2.36 può essere facilmente esteso a più vincoli lineari per un maggiore controllo sul beampattern. Per esempio, se c'è una sorgente di interferenza fissa ad una direzione nota ϕ , potrebbe essere desiderabile forzare a zero il guadagno in quella direzione al fine di mantenere la risposta g per il segnale desiderato. Questo si esprime dicendo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}^H(\theta, \omega) \\ \mathbf{d}^H(\phi, \omega) \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} g^* \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Se ci sono $L < N$ vincoli lineari su \mathbf{w} , li scriviamo nella forma:

$$\mathbf{C}^H \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad (2.40)$$

dove la matrice \mathbf{C} di $N \times L$ elementi ed il vettore \mathbf{f} L -dimensionale vengono detti *matrice dei vincoli* e *vettore risposta*. Si suppone che i vincoli siano linearmente indipendenti, in modo tale che \mathbf{C} abbia rango massimo L .

La formulazione del problema LCMV e la relativa soluzione per questa equazione di vincolo più generale vengono riportate in Tab. 2.3.

Progettazione dei vincoli

Si possono seguire diverse filosofie per la scelta della matrice dei vincoli e del vettore risposta. Di seguito ne sono illustrate solo alcune. In molte applicazioni, una combinazione di differenti tipi di vincoli è per lo più una questione pratica. Ogni vincolo lineare usa un grado di libertà nel vettore dei coefficienti, pertanto con L vincoli restano solo $N - L$ gradi di libertà per la minimizzazione della varianza.

Vincoli puntuali condizionano la risposta del beamformer in specifiche direzioni spaziali e frequenze temporali anch'esse puntuali. L'equazione 2.39 rappresenta un esempio di due vincoli

puntuali su \mathbf{w} . Il numero massimo di punti nei quali la risposta può essere vincolata è limitato a N . Se si usano N vincoli allora non restano ulteriori gradi di libertà per la minimizzazione della potenza e si ricade nel caso di beamformer data-independent.

Vincoli derivativi vengono usati per influenzare la risposta in un insieme di direzioni e/o frequenze forzando a zero la derivata della risposta del beamformer in certe direzioni e frequenze. Solitamente vengono impiegati in combinazione con i vincoli puntuali. Un esempio di quando i vincoli derivativi risultino utili si ha ad esempio quando la direzione del segnale desiderato è nota a priori solo approssimativamente. Se il segnale arriva vicino alla direzione alla quale è stato posto il vincolo puntuale, l'utilizzo di un vincolo derivativo in quel punto cautela il beamformer dalla sintesi di uno zero in direzione del segnale desiderato.

Vincoli sugli autovettori si basano sull'approssimazione ai minimi quadrati della risposta desiderata e tipicamente vengono usati per controllare la risposta dei beamformer in un insieme di direzioni e frequenze.

Vincolando la risposta del beamformer (nel senso dei minimi quadrati) si assicura che l'errore quadratico medio tra la risposta del beamformer desiderato e quello effettivo, su una certa regione, venga minimizzato per un certo numero di vincoli.

In questo senso, i vincoli sugli autovettori sono molto efficienti.

Si consideri la progettazione di un insieme di vincoli che controlleranno la risposta del beamformer con una sorgente in direzione θ_0 in un range di frequenze $[\omega_a, \omega_b]$. L'ordine di grandezza del modulo di $\mathbf{d}(\theta_0, \omega)$ su tale banda è dato approssimativamente dal TBWP della sorgente (vedi paragrafo 2.2).

I vincoli sugli autovettori si ricavano dalla 2.28 prendendo P decisamente più grande del TBWP. Così gli ω_i sovracampionano la banda $[\omega_a, \omega_b]$ e \mathbf{A} risulta malcondizionata.

Un'approssimazione di rango L per \mathbf{A} si ottiene mediante la sua SVD⁵:

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{V} \sum_{\mathbf{L}} \mathbf{U}^H \quad (2.41)$$

dove $\sum_{\mathbf{L}}$ è una matrice diagonale contenente i primi valori singolari (i più elevati) di \mathbf{A} , e le L colonne di \mathbf{V} e di \mathbf{U} sono rispettivamente i vettori singolari sinistri e destri di \mathbf{A} , corrispondenti a tali autovalori.

Sostituendo \mathbf{A} nella 2.28 con la sua approssimazione di rango L riportata in 2.41 e portando $\mathbf{U} \sum_{\mathbf{L}}$ a destra dell'equazione (si ricordi che la pseudoinversa di \mathbf{U} è \mathbf{U}^H), si ricava

$$\mathbf{V}^H \mathbf{w} = \sum_{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{U}^H \mathbf{r}_d \quad (2.42)$$

L'equazione 2.42 ha la stessa forma dell'equazione dei vincoli 2.40. Le colonne di \mathbf{V} corrispondono agli autovettori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$; da qui il nome del metodo. (Si noti che $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ rappresenta un'approssimazione della \mathbf{R}_x nella 2.23 quando $S(\omega) = 1$).

⁵Singular Value Decomposition.

Generalized Sidelobe Canceller (GSC)

Il GSC rappresenta una formulazione alternativa al problema LCMV, intuitiva, utile per l'analisi del beamformer e che ne può semplificare la sua implementazione mediante LCMV. Serve anche ad illustrare meglio la relazione esistente tra beamforming MSC e beamforming LCMV.

Il GSC è una tecnica per trasformare un problema di minimo vincolato in un problema di minimo assoluto. Supponiamo di scomporre il vettore dei coefficienti \mathbf{w} in due componenti ortogonali \mathbf{w}_0 e $-\mathbf{v}$ ($\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{v}$) poste rispettivamente nello spazio delle colonne di \mathbf{C} e nel suo corrispondente spazio nullo in modo che questa scomposizione possa essere usata per rappresentare qualunque \mathbf{w} . Dal momento che

$$\mathbf{C}^H \mathbf{v} = 0 \quad (2.43)$$

deve essere

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{C}(\mathbf{C}^H \mathbf{C})^{-1} \mathbf{f} \quad (2.44)$$

se \mathbf{w} deve soddisfare ai vincoli.

La 2.44 è la soluzione in norma minima L_2 all'equivalente problema sottodeterminato di 2.28.

Il vettore \mathbf{v} è una combinazione lineare delle colonne di una matrice \mathbf{C}_n (cioè $\mathbf{v} = \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n$) di dimensioni $N \times N - L$ purchè le colonne di \mathbf{C}_n formino una base per lo spazio nullo di \mathbf{C} .

\mathbf{C}_n può essere ottenuta da \mathbf{C} utilizzando una qualsiasi procedura di ortogonalizzazione (ad esempio: Gram-Schmidt, QR decomposition o SVD). Il vettore dei coefficienti

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n \quad (2.45)$$

è rappresentato in forma di diagramma a blocchi in Fig. 2.13. La scelta di \mathbf{w}_0 e \mathbf{C}_n implica che \mathbf{w} soddisfi i vincoli indipendentemente da \mathbf{w}_n e riduce il problema LCMV al problema senza vincoli

$$\min_{\mathbf{w}_n} [\mathbf{w}_0 - \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n]^H \mathbf{R}_x [\mathbf{w}_0 - \mathbf{C}_n \mathbf{w}_n] \quad (2.46)$$

la cui soluzione risulta essere

$$\mathbf{w}_n = (\mathbf{C}_n^H \mathbf{R}_x \mathbf{C}_n)^{-1} \mathbf{C}_n^H \mathbf{R}_x \mathbf{w}_0 \quad (2.47)$$

Il vantaggio principale che si ottiene da questa formulazione alternativa (ma del tutto equivalente) sta nel fatto che i coefficienti \mathbf{w}_n sono svincolati ed un beamformer \mathbf{w}_0 data-independent viene implementato come parte integrante del beamformer adattativo. La natura svincolata dei coefficienti permette di impiegare algoritmi adattativi molto più semplici ed il beamformer data-independent risulta molto utile in situazioni dove si verifichi una cancellazione del segnale. (vedi paragrafo 2.4.5).

A titolo di esempio, si supponga che i vincoli dati siano come quelli in 2.36. La 2.44 implica che

$$\mathbf{w}_0 = g^* \mathbf{d}(\theta, \omega) / [\mathbf{d}^H(\theta, \omega) \mathbf{d}(\theta, \omega)] \quad (2.48)$$

\mathbf{C}_n soddisfa la

$$\mathbf{d}^H(\theta, \omega) \mathbf{C}_n = 0 \quad (2.49)$$

cosicchè ogni colonna $[\mathbf{C}_n]_i$ per $1 \leq i \leq N-L$ può essere vista come un beamformer data-independent con uno zero in direzione θ alla frequenza ω : $\mathbf{d}^H(\theta, \omega) [\mathbf{C}_n]_i = 0$. Perciò, qualunque segnale a frequenza ω e direzione θ che arrivi sull'array sarà bloccato o annullato dalla matrice \mathbf{C}_n .

In genere, se i vincoli sono progettati per presentare una certa risposta ai segnali a partire da

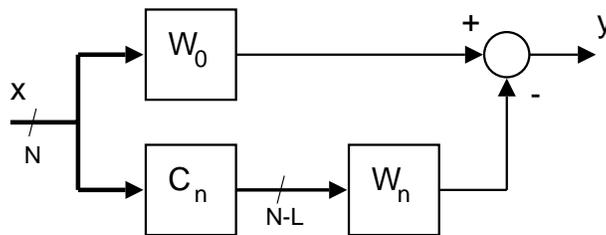


Figura 2.13: Il GSC rappresenta un'implementazione del beamformer LCMV in cui i coefficienti adattativi sono svincolati.

un certo insieme di direzioni e frequenze, le colonne di \mathbf{C}_n bloccheranno tali direzioni e frequenze. Questa caratteristica ha portato alla definizione dell'espressione *matrice di blocco* per \mathbf{C}_n . Questi segnali sono processati solo da \mathbf{w}_0 e dato che \mathbf{w}_0 soddisfa ai vincoli, sono presentati con la desiderata risposta indipendente da \mathbf{w}_n . Segnali da direzioni e frequenze sulle quali la risposta non è vincolata passeranno attraverso il ramo superiore di Fig. 2.13 con una qualche risposta determinata da \mathbf{w}_0 . Il ramo inferiore sceglie \mathbf{w}_n per stimare i segnali all'uscita di w_0 come una combinazione lineare dei dati all'uscita della matrice di blocco. Tale operazione è simile a quanto visto nell'MSC, dove i coefficienti sono applicati all'uscita di sensori ausiliari al fine di stimare l'uscita del canale primario (vedi Fig. 2.12).

2.4.5 La cancellazione del segnale desiderato nel beamforming ad ottimo statistico.

Il beamforming ottimo richiede qualche informazione a priori del segnale desiderato, che può essere: la sua statistica (per i metodi del segnale di riferimento e del massimo SNR), la sua direzione (per l'MSC) o il suo vettore di risposta $\mathbf{d}(\theta, \omega)$ (nel caso di beamformer LCMV). Se l'informazione richiesta a priori risulterà non accurata, il beamformer ottimo attenuerà il segnale desiderato come

se si trattasse di un'interferenza. La cancellazione del segnale desiderato è spesso significativa, specialmente se l'SNR del segnale desiderato risulta elevato (non è certo il caso della radioastronomia e queste considerazioni vengono riportate solo per completezza).

Una seconda possibile causa di cancellazione del segnale è la correlazione che può esistere tra il segnale desiderato e uno o più segnali interferenti. Ciò può accadere ad esempio in caso di propagazione *a cammini multipli* del segnale desiderato (in radioastronomia questo non avviene mai).

Quando interferenze e segnale desiderato sono incorrelati, il beamformer attenua gli interferenti per minimizzare la potenza in uscita. Tuttavia, con un'interferenza correlata, il beamformer minimizza la potenza in uscita trattando il segnale interferente in modo tale da cancellare il segnale desiderato. Se l'interferente è parzialmente correlato con il segnale desiderato, allora il beamformer cancellerà la sola porzione di segnale desiderato che è correlata all'interferenza.

2.5 Algoritmi adattativi per il beamforming

Le equazioni per il calcolo del vettore dei coefficienti per i beamformers ottimi elencate in Tab. 2.3 richiedono la conoscenza a priori dei descrittori statistici del secondo ordine. Questi operatori in genere non sono noti, ma con l'ipotesi di *ergodicità* del segnale, tali descrittori (e dunque i coefficienti ottimi) possono essere stimati dai dati disponibili. Inoltre tali parametri possono variare nel tempo, ad esempio con il moto delle sorgenti interferenti. Per risolvere questi problemi, i coefficienti di solito sono tipicamente determinati mediante algoritmi adattativi.

Fondamentalmente esistono due strategie:

adattività a blocchi dove i parametri statistici vengono prima stimati da un blocco temporale di dati e poi vengono utilizzati nell'equazione per il calcolo dei coefficienti ottimi;

adattività continua dove i coefficienti vengono aggiornati ad ogni passo di campionamento affinché il risultante vettore dei coefficienti converga alla soluzione ottima.

In caso di ambiente non stazionario, si può utilizzare l'adattività a blocchi, purchè i coefficienti vengano ricalcolati periodicamente. L'adattività continua invece, è preferibile solitamente quando i parametri statistici sono tempo-varianti o (per ragioni computazionali) quando il numero M di coefficienti adattativi risulti modesto.

Piuttosto che ricapitolare gli algoritmi adattativi per ogni beamformer ottimo riportato in Tab. 2.3, si cerca di ricondursi al problema standard del filtraggio adattativo riportato in Fig. 2.14.

In Fig. 2.14 i coefficienti vengono scelti per stimare il segnale desiderato y_d da una combinazione lineare degli elementi del vettore dati \mathbf{u} . Scegliamo \mathbf{w}_M per minimizzare l'MSE

$$J(\mathbf{w}_M) = E[|y_d - \mathbf{w}_M^H \mathbf{u}|^2] = \sigma_d^2 - \mathbf{w}_M^H \mathbf{r}_{ud} - \mathbf{r}_{ud}^H \mathbf{w}_M + \mathbf{w}_M^H \mathbf{R}_u \mathbf{w}_M \quad (2.50)$$

dove $\sigma_d^2 = E[|y_d|^2]$, $\mathbf{r}_{\mathbf{u}d} = E[\mathbf{u}y_d^*]$ e $\mathbf{R}_{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}\mathbf{u}^H]$.

Si dimostra che la 2.50 è minimizzata da

$$\mathbf{w}_{\text{opt}} = \mathbf{R}_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbf{r}_{\mathbf{u}d} \quad (2.51)$$

Un confronto tra la 2.50 e i criteri riportati in Tab. 2.3 indica che il problema standard del filtraggio adattativo è equivalente sia al problema del beamformer MSC (ponendo $y_d = y_m$ e $\mathbf{u} = \mathbf{x}_a$) sia al problema del beamformer con segnale di riferimento (posto $\mathbf{u} = \mathbf{x}$).

Apparentemente il problema LCMV sembra differente. Tuttavia un esame più accurato delle figg.

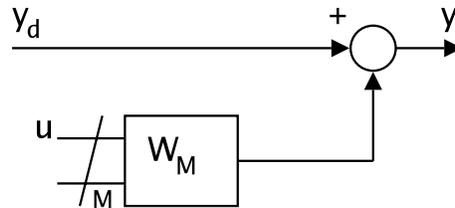


Figura 2.14: La configurazione standard del filtro adattativo.

2.13 e 2.14 e delle equazioni 2.47 e 2.51 mostra che il problema standard del filtraggio adattativo è equivalente al problema LCMV implementato con la struttura GSC. Ponendo $\mathbf{u} = \mathbf{C}_n^H \mathbf{x}$ e $y_d = \mathbf{w}_0^H \mathbf{x}$ si ha

$$\mathbf{R}_{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_n^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \mathbf{C}_n \quad (2.52)$$

e

$$\mathbf{r}_{\mathbf{u}d} = \mathbf{C}_n^H \mathbf{R}_{\mathbf{x}} \mathbf{w}_0 \quad (2.53)$$

Il beamformer a SNR massimo invece, può non essere rappresentato dalla Fig. 2.14 e dalla 2.51. Tuttavia, se si osserva con la 2.37 che se il segnale desiderato è a banda stretta, allora i beamformer a massimo SNR e LCMV sono equivalenti.

L'approccio per blocchi risolve la 2.51 usando degli *stimatori* per $\mathbf{R}_{\mathbf{u}d}$ e $\mathbf{r}_{\mathbf{u}d}$ formati da K campioni di \mathbf{u} e y_d : $\mathbf{u}(k), y_d(k), 0 \leq k \leq K-1$.

Gli stimatori più comuni sono la *matrice di covarianza campionaria*

$$\hat{\mathbf{R}}_{\mathbf{u}} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{u}(k) \mathbf{u}^H(k) \quad (2.54)$$

e il *vettore di cross-covarianza campionario*

$$\hat{\mathbf{r}}_{\mathbf{u}d} = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{u}(k)y_d^*(k) \quad (2.55)$$

Gli algoritmi di adattività continua si sviluppano facilmente nei termini di Fig. 2.14 e dell'eq. 2.50. Si noti che $J(\mathbf{w}_M)$ è una forma quadratica che esprime l'errore.

Dal momento che l'Hessiano \mathbf{R}_u della superficie quadratica è la matrice di covarianza dei dati affetti da rumore, questa è definita positiva. Ciò implica che la superficie ha la forma di una *valle*. La forma a valle è determinata dall'*autostruttura* di \mathbf{R}_u .

Il vettore dei coefficienti ottimi \mathbf{w}_{opt} si ha in corrispondenza del fondo di tale valle.

Un'interpretazione del filtraggio adattativo consiste nell'immaginare un punto sulla superficie che corrisponda al vettore dei coefficienti attuale $\mathbf{w}_M(\mathbf{k})$. Scegliamo il nuovo vettore dei coefficienti $\mathbf{w}_M(k+1)$ in modo da scendere lungo la superficie.

Il vettore gradiente

$$\nabla_{\mathbf{w}_M(\mathbf{k})} = \left. \frac{\partial J(\mathbf{w}_M)}{\partial \mathbf{w}_M} \right|_{\mathbf{w}_M=\mathbf{w}_M(k)} = -2\mathbf{r}_{\mathbf{u}d} + 2\mathbf{R}_u\mathbf{w}_M(k) \quad (2.56)$$

esprime la direzione nella quale *correggere* il vettore dei coefficienti.

È il cosiddetto *metodo del gradiente*, che prevede la correzione del vettore dei coefficienti nella direzione negativa del gradiente stesso e che porta all'algoritmo adattativo dei minimi quadrati (*Least Mean Square, LMS*).

L'algoritmo LMS sostituisce $\nabla_{\mathbf{w}_M(\mathbf{k})}$ con un suo stimatore istantaneo:

$$\hat{\nabla}_{\mathbf{w}_M(\mathbf{k})} = -2[\mathbf{u}(k)y_d^*(k) - \mathbf{u}(k)\mathbf{u}^H(k)\mathbf{w}_M(k)] \quad (2.57)$$

Indicando con $y(k) = y_d(k) - \mathbf{w}_M^H(k)\mathbf{u}(k)$, si ottiene:

$$\mathbf{w}_M(k+1) = \mathbf{w}_M(k) + \mu\mathbf{u}(k)y^*(k). \quad (2.58)$$

La costante di guadagno μ controlla le caratteristiche di convergenza delle sequenze di vettori casuali $\mathbf{w}_M(k)$. La Tab. 2.4 fornisce delle linee guida per il suo dimensionamento.

Il primo vantaggio che si ottiene dall'algoritmo LMS è la sua semplicità.

Le sue prestazioni sono accettabili in molte applicazioni; tuttavia, le sue caratteristiche di convergenza dipendono dalla forma della superficie e quindi dall'autostruttura di \mathbf{R}_u . Quando gli autovalori sono fortemente dispersi, la convergenza può essere lenta e dovrebbero essere presi in considerazione altri algoritmi adattativi, con caratteristiche migliori di convergenza. In aggiunta agli algoritmi basati sui minimi quadrati e al filtro di Kalman, sono state proposte procedure alternative per la ricerca della superficie d'errore. In pratica questi algoritmi cercano un compromesso tra i requisiti computazionali e la velocità di convergenza per \mathbf{w}_{opt} .

Un'alternativa all'LMS è l'algoritmo *RLS* (*Recursive Least Square*) a pesatura esponenziale. Al k -esimo passo, $\mathbf{w}_M(\mathbf{k})$ viene scelto per minimizzare una somma pesata dei precedenti errori quadratici

$$\min_{\mathbf{w}_M(k)} \sum_{k=0}^{\kappa} \lambda^{\kappa-k} |y_d(k) - \mathbf{w}_M^H(\kappa) \mathbf{u}(k)|^2. \quad (2.59)$$

λ è una costante positiva minore di uno che determina quanto velocemente debbano essere smorzati i dati precedenti. L'algoritmo RLS si ottiene dalla 2.59 sviluppando il modulo quadro e applicando le proprietà delle matrici inverse.

La Tab. 2.4 riassume sia l'algoritmo LMS che l'algoritmo RLS.

2.6 Cancellazione delle interferenze ed algoritmi di beamforming parzialmente adattativi

Negli algoritmi adattativi, il carico computazionale ad ogni aggiornamento può essere proporzionale alle dimensioni M del vettore dei coefficienti o al suo quadrato (M^2). Se M è grande, il carico è piuttosto considerevole e nella pratica, per implementazioni in tempo reale, spesso è necessario ridurre M .

L'espressione gradi di libertà si riferisce al numero di coefficienti non vincolati, cioè "liberi".

Per esempio, un beamformer LCMV con L vincoli su N coefficienti ha $N - L$ gradi di libertà; l'implementazione GSC li distingue nel vettore dei coefficienti svincolati \mathbf{w}_n . Ci sono M gradi di

	LMS	RLS
Inizializzazione	$w_M(0) = 0$ $y(0) = y_d(0)$ $0 \leq \mu \leq \frac{1}{\text{traccia}[R_u]}$	$w_M(0) = 0$ $P(0) = \delta^{-1} I$ δ piccolo, I : matrice identità
Equazione di aggiornamento	$w_M(k) = w_M(k-1) + \mu u(k-1) y^*(k-1)$ $y(k) = y_d(k) - w_M^H(k) u(k)$	$v(k) = P(k-1) u(k)$ $K(k) = \frac{\lambda^{-1} v(k)}{1 + \lambda^{-1} u^H(k) v(k)}$ $\alpha(k) = y_d(k) - w_M^H(k-1) u(k)$ $w_M(k) = w_M(k-1) + K(k) \alpha^*(k)$ $P(k) = \lambda^{-1} P(k-1) - \lambda^{-1} K(k) v^H(k)$
Moltiplicazioni per aggiornamento	$2M$	$4M^2 + 4M + 2$
Prestazioni e caratteristiche	Sotto certe condizioni, la convergenza di $w_M(k)$ al vettore dei coefficienti ottimi w_{opt} (nel senso quadratico medio) è garantita se μ viene scelta nel rispetto della condizione riportata sopra. La velocità di convergenza è governata dalla dispersione degli autovalori di R_u . Per dispersioni elevate, la convergenza può essere molto lenta.	Il $w_M(k)$ rappresenta la soluzione ai minimi quadrati ad ogni istante k . La convergenza al vettore ottimo statistico w_{opt} è spesso più veloce di quella ottenuta usando l'algoritmo LMS perchè è indipendente dalla dispersione degli autovalori di R_u .

Tabella 2.4: Confronto tra gli algoritmi adattativi LMS e RLS per la stima adattativa dei coefficienti ottimi.

libertà nella struttura di Fig. 2.14.

Un beamformer *completamente adattativo* usa tutti i gradi di libertà disponibili mentre un beamformer *parzialmente adattativo* usa un insieme ridotto di gradi di libertà.

La riduzione dei gradi di libertà abbassa il carico computazionale e spesso migliora il tempo di risposta adattiva. Tuttavia, c'è un prezzo da pagare nelle prestazioni per il minor numero di gradi di libertà. Un beamformer parzialmente adattativo non può convergere alla stessa soluzione ottima come nel caso di beamformer completamente adattativo. L'obiettivo nella progettazione del beamformer parzialmente adattativo è la riduzione dei gradi di libertà senza una degradazione significativa delle prestazioni.

Quanto si evidenzia in questo paragrafo è applicabile a diversi tipi di beamformers, sebbene si utilizzi in modo predominante la notazione del GSC. Si suppone che il beamformer sia descritto dalla struttura adattativa di Fig. 2.14 dove il segnale desiderato y_d è ottenuto come:

$$y_d = \mathbf{w}_0^H \mathbf{x} \quad (2.60)$$

e il vettore dei dati \mathbf{u} come:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}^H \mathbf{x} \quad (2.61)$$

Perciò, l'uscita del beamformer è:

$$y = \mathbf{w}^H \mathbf{x} \quad (2.62)$$

dove

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - \mathbf{T} \mathbf{w}_M \quad (2.63)$$

Al fine di distinguere tra implementazioni completamente e parzialmente adattative, scomponiamo \mathbf{T} nel prodotto di due matrici $\mathbf{C}_n \mathbf{T}_M$. La definizione di \mathbf{C}_n dipende dal particolare beamformer mentre \mathbf{T}_M rappresenta la maschera che riduce i gradi di libertà.

L'MSC e il GSC si ottengono come caso particolare di questa rappresentazione. Nell'MSC \mathbf{w}_0 è un vettore a N componenti che seleziona il sensore primario, \mathbf{C}_n è una matrice $N \times N - 1$ che seleziona gli $N - 1$ possibili sensori ausiliari dall'insieme completo di N sensori e \mathbf{T}_M è una matrice $N - 1 \times M$ che sceglie gli M sensori utilizzati in pratica. In termini di GSC, \mathbf{w}_0 e \mathbf{C}_n sono definiti come nel paragrafo 2.4 mentre \mathbf{T}_M è una matrice $N - L \times M$ che riduce i gradi di libertà ($M < N - L$).

2.6.1 Cancellazione delle radiointerferenze e gradi di libertà

I risultati di questo sottoparagrafo dipendono da \mathbf{T} ma sono indipendenti dai singoli termini \mathbf{C}_n e \mathbf{T}_M . Supponiamo che il beamformer non cancelli il segnale desiderato (vedi paragrafo 2.4.5) e

che i coefficienti ottimi incidano solo sulle interferenze e sul rumore incorrelato. Questo semplifica l'analisi permettendoci di escludere considerazioni a priori sul segnale desiderato.

Si supponga di avere una sorgente di interferenza a banda stretta (a frequenza ω_0) che incida sull'array dalla direzione θ_1 . La risposta del ramo \mathbf{w}_0 è:

$$g_1 = \mathbf{w}_0^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega_0) \quad (2.64)$$

Una cancellazione perfetta di questa sorgente richiede $\mathbf{w}^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega_0)$ cosicchè dobbiamo scegliere \mathbf{w}_M che soddisfi

$$\mathbf{w}_M^H \mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega_0) = g_1 \quad (2.65)$$

Si assuma che $\mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega_0)$ sia non nulla, la 2.65 rappresenta un sistema di una equazione in M incognite (gli elementi di \mathbf{w}_M) per il quale esiste sempre almeno una soluzione. Per cancellare simultaneamente una seconda interferenza dalla direzione θ_2 , \mathbf{w}_M deve soddisfare

$$\mathbf{w}_M^H [\mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega_0) \mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_2, \omega_0)] = [g_1 \quad g_2] \quad (2.66)$$

dove $g_2 = \mathbf{w}_0^H \mathbf{d}(\theta_2, \omega_0)$. Assumendo che $\mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega_0)$ e $\mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_2, \omega_0)$ siano linearmente indipendenti e non nulli e che $M \geq 2$, allora esiste almeno un \mathbf{w}_M che soddisfa la 2.66. Estendendo questo ragionamento, si nota che \mathbf{w}_M può essere scelto per cancellare M interferenti a banda stretta (assumendo che i $\mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_i, \omega_0)$ siano linearmente indipendenti e non nulli) e indipendenti da \mathbf{T} . La cancellazione totale si ha se \mathbf{w}_M viene scelto in modo tale che la risposta di $\mathbf{T} \mathbf{w}_M$ coincida esattamente con la risposta del ramo \mathbf{w}_0 agli interferenti.

Finora sono stati considerati solo interferenti puntiformi a banda stretta.

Il rumore incorrelato sarà sempre presente, in ogni sistema reale e contribuirà alla potenza totale in uscita.

In un beamformer ottimo, \mathbf{w}_M è scelto per minimizzare la potenza complessiva in uscita. Si ricordi che la potenza in uscita dovuta al rumore incorrelato è proporzionale al quadrato della norma L_2 dell'intero vettore dei coefficienti \mathbf{w} (*guadagno di rumore bianco*). La norma di \mathbf{w} può diventare elevata quando \mathbf{w}_M viene scelto per fornire una cancellazione totale delle interferenze, a seconda della scelta di \mathbf{T} e della posizione degli interferenti. Perciò, sebbene in principio sorgenti di energia puntuali in direzione e frequenza possano essere cancellate completamente con un coefficiente per interferenza indipendente da \mathbf{T} , la presenza di rumore incorrelato risulta nel grado di cancellazione essere dipendente dalla corrispondenza descritta da \mathbf{T} .

Si considerino ora interferenti che sono spazialmente puntuali ma a larga banda, in un range di frequenze $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$. La risposta del ramo \mathbf{w}_0 ad un interferente a θ_1 è espresso dalla 2.65. Per raggiungere la cancellazione totale, \mathbf{w}_M deve essere scelto tale da soddisfare

$$\mathbf{w}_M^H \mathbf{T}^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega) = g_1(\omega) \quad \omega_a \leq \omega \leq \omega_b. \quad (2.67)$$

Si definisca la risposta di ogni colonna di \mathbf{T} come

$$f_i(\omega) = [\mathbf{T}]_i^H \mathbf{d}(\theta_1, \omega) \quad 1 \leq i \leq M \quad (2.68)$$

dove $[\mathbf{T}]_i$ indica la i -esima colonna di \mathbf{T} . La 2.68 richiede che $g_1(\omega)$ venga espressa come una combinazione lineare di $f_i(\omega)$ con $1 \leq i \leq M$ su $\omega_a \leq \omega \leq \omega_b$. In generale, questo non è possibile, perciò escludiamo la cancellazione di interferenti a larga banda non può essere ottenuta.

La potenza in uscita dovuta all'interferente a larga banda può essere espressa come l'integrale in frequenza del modulo quadro della differenza tra il ramo \mathbf{w}_0 e le risposte dei rami adattivi pesate dallo spettro di potenza dell'interferente.

Il grado di cancellazione può variare drasticamente e dipende criticamente dalla direzione dell'interferente, dal suo contenuto spettrale e dalla scelta di \mathbf{T} .

Si può ottenere una buona cancellazione in certe situazioni, dove $M = 1$, mentre in altre, anche grandi valori di M producono una scarsa cancellazione. Queste conclusioni sono valide anche per sorgenti a banda stretta ma a largo range di direzione (*radiazione spazialmente distribuita*).

2.6.2 Progettazione di beamformers parzialmente adattativi

La trattazione precedente mostra che il grado di cancellazione dell'interferenza dipende in maniera critica dall'abilità del canale adattativo ($\mathbf{T}\mathbf{w}_M$) di modellare la risposta del canale primario tenendo in considerazione lo spettro del segnale interferente. Questo fornisce un mezzo mediante il quale valutare i beamformers parzialmente adattativi.

Si effettuerà inizialmente una discussione sintetica sui diversi approcci a banda stretta ed in seguito si discuterà la loro estensione al caso a banda larga. Infine si prenderanno in considerazione le tecniche che sono direttamente applicabili alle situazioni a larga banda.

Alcune tecniche scelgono \mathbf{T}_M per una data \mathbf{C}_n mentre altre scelgono \mathbf{T} direttamente.

Diversi approcci per ridurre i gradi di libertà sono basati sul processing di un sottoinsieme delle uscite della matrice \mathbf{C}_n . Questo implica che \mathbf{T}_M sia una matrice sparsa contenenti degli zero ed uno. Le uscite di \mathbf{C}_n nell'MSC sono semplicemente le uscite dei sensori ausiliari.

Alcuni studiosi hanno caratterizzato le prestazioni del beamformer parzialmente adattativo quando \mathbf{T}_M selezionava vari sottoinsiemi delle uscite ausiliarie. Tale approccio viene detto *nello spazio degli elementi*, dal momento che viene utilizzato un sottoinsieme delle uscite degli elementi sensori.

Altri hanno cercato di scegliere le colonne di \mathbf{T} per formare i beams. (Questo approccio è detto invece *nello spazio del beam*). Le colonne di \mathbf{C}_n vengono progettate come beamformers data-independent, ognuno orientato in una direzione diversa, mentre \mathbf{T}_M può essere usato per scegliere un sottoinsieme delle uscite del beam. L'obiettivo è direzionare il beam verso ogni sorgente di interferenza cosicchè

questa possa essere sottratta dall'uscita del ramo \mathbf{w}_0 . Un modo per ottenere ciò, è selezionare un numero sufficiente di beams per coprire tutte le direzioni possibili dalle quali le interferenze potrebbero arrivare. Un altro modo è utilizzare tecniche di *direction finding* per selezionare quali beams corrispondono alle direzioni di interferenza stimata.

Il vantaggio maggiore nell'approccio nello spazio degli elementi è la semplicità di implementazione. Prestazioni migliori ottenute usando il processing nello spazio del beam sono particolarmente evidenti per interferenze dovute sia a sorgenti spazialmente distribuite che a sorgenti con apprezzabile banda spettrale. Tuttavia, questo miglioramento si ottiene a spese dell'implementazione dei beams richiesti.

Alcuni studiosi hanno poi considerato la scelta delle colonne di \mathbf{T} per selezionare dei subarrays, quindi ogni colonna coinvolge solo un certo sotto-insieme di sensori nell'array. La pesatura applicata ad ogni subarray (elementi di \mathbf{T}) può essere effettuata in modi diversi, uno dei quale consiste nell'utilizzare il subarray per formare un beam. Le prestazioni dipendono dal numero di sensori, da quali sensori vengono impiegati e dai coefficienti usati per combinare le uscite dei sensori (in ogni subarray). Si noti che ogni colonna di \mathbf{T} avrà zeri nelle direzioni in corrispondenza dei sensori esclusi da quel subarray, cosicchè la \mathbf{T} complessiva avrà una struttura sparsa.

C'è poi chi suggerisce un metodo a banda stretta per il GSC nel quale le colonne di \mathbf{T}_M sono scelte come base per lo spazio esplorato dai vettori di coefficienti completamente adattativi. La dimensione di questo spazio è data dal rango della componente spazialmente correlata della matrice di covarianza.

Infine, c'è chi ha esteso questo approccio al caso a banda larga. La dimensione dello spazio completamente adattativo può essere grande in questo, dal momento che è dato dal rango delle componenti correlate della matrice di covarianza dell'interferenza a larga banda.

Gli approcci descritti sopra sono capaci di prestazioni soddisfacenti con interferenti a banda stretta, dal momento che la cancellazione richiede circa un grado di libertà per interferente. Con interferenti a larga banda la risposta del main beam è più complicata e deve essere adattata su un range di frequenze per ogni direzione interferente.

Sebbene l'approccio a larga banda possa essere esteso, è difficile farlo mantenendo piccolo il numero M di coefficienti adattativi. Per esempio, diversi banchi di beams potrebbero essere progettati per coprire il range di direzioni, con ogni banco operante a frequenze diverse. Il problema è che il numero di beams richiesti può diventare grande al crescere della banda di frequenze. Noi cerchiamo una \mathbf{T} che sia efficiente, cioè che fornisca una buona cancellazione con il minimo numero di colonne.

Alcuni hanno poi considerato un approccio basato sull'ottimizzazione per la scelta delle colonne di \mathbf{T} nel contesto del beamforming LCMV. La matrice \mathbf{C}_n è progettata per soddisfare i vincoli, riducendo il problema ad un'ottimizzazione svincolata sugli elementi di \mathbf{T}_M .

\mathbf{T}_M è scelta per minimizzare la potenza media in uscita dell'interferenza.

Sia α un vettore che parametrizzi l'ambiente di interferenze di interesse. In genere, α può rap-

presentare la posizione delle interferenze, i livelli di potenza, le distribuzioni spaziali, il numero di interferenze, etc.

Definendo $P_i(\alpha)$ come la potenza interferente in uscita, \mathbf{T}_M viene scelta come

$$\min_{T_M} \int_{\alpha_a}^{\alpha_b} P_i(\alpha) d\alpha \quad (2.69)$$

dove $[\alpha_a, \alpha_b]$ indica l'insieme degli scenari delle interferenze di interesse.

Dal momento che la potenza in uscita corrisponde all'errore tra il ramo \mathbf{w}_0 e le risposte dei canali adattativi, la 2.69 permette la scelta di \mathbf{T}_M per fornire la migliore risposta possibile all'ambiente interferente $[\alpha_a, \alpha_b]$.

L'equazione 2.69 rappresenta un problema di progettazione non lineare nei parametri di \mathbf{T}_M .

È stato provato che un approccio sub-ottimale per risolvere la 2.69, in cui \mathbf{T}_M viene progettata sequenzialmente una colonna alla volta, risulta essere efficace per la cancellazione adattativa delle interferenze, con un numero limitato di coefficienti. Il problema resta ancora non lineare, ma è possibile ottenere una soluzione approssimata ed efficace, risolvendo un problema lineare ai minimi quadrati.

2.7 Metodi di implemetazioni dei beamformers

Nella sua forma più semplice, un beamformer rappresenta una combinazione lineare dei dati provenienti dai sensori. Tuttavia, ci sono molti modi per implementare la somma pesata, ognuno dei quali con le proprie caratteristiche in termini di prestazioni e complessità.

Essenzialmente, la maggior parte delle implementazioni può essere rappresentata mediante la scomposizione di \mathbf{w} nel prodotto di matrici ed un vettore

$$\mathbf{w} = \left[\prod_{i=1}^{v_0} \mathbf{V}_i \right] \mathbf{w}_v. \quad (2.70)$$

\mathbf{V}_i per $1 \leq i \leq v_0$ sono una serie di trasformazione matriciali di dimensioni conformi mentre \mathbf{w}_v è un vettore.

Come regola generale, si può dire che le matrici di trasformazione sono scelte in modo tale da migliorare le prestazioni e/o abbassare la complessità computazionale.

L'implementazione *fast* della DFT, cioè la FFT, è un caso particolare della 2.70, dal momento che la matrice DFT può essere espressa come il prodotto di matrici, rappresentanti una serie di calcoli molto semplici.

Il GSC è un altro esempio della 2.70 dove $v_0 = 1$, $\mathbf{V}_1 = [\mathbf{w}_0 | \mathbf{C}_n]$, e $\mathbf{w}_v = [1, \mathbf{w}_n^H]^H$.

\mathbf{V}_1 semplifica l'implementazione dell'algoritmo adattativo permettendo l'adattività di \mathbf{w}_n svincolata.

Come già è stato detto nel paragrafo 2.2, il beamforming a larga banda può essere implementato nel dominio della frequenza o nel dominio del tempo. I coefficienti usati per ottenere le uscite ad ogni frequenza per il beamformer schematizzato in Fig. 2.7 sono semplicemente rappresentati nei termini della 2.70, impiegando la rappresentazione matriciale della DFT.

I beamformers ottimi nel dominio della frequenza solitamente scelgono i coefficienti in ogni frequenza solo in base ai dati a quella frequenza. Questa partizione dei dati influenza sia le prestazioni sia la complessità computazionale.

Lo studio delle implementazioni del beamforming è un'area di ricerca in continua evoluzione, grazie anche ai progressi effettuati nel campo della scala di integrazione elettronica e delle tecnologie di calcolo parallelo.

2.8 Riassunto

Un beamformer è un sistema che forma alla sua uscita un segnale scalare, come una combinazione pesata dei dati ricevuti ad una schiera di sensori.

I coefficienti (o pesi) determinano le caratteristiche di filtraggio spaziale del beamformer e consentono la separazione di segnali aventi sovrapposizione spettrale e differenti posizioni spaziali.

I coefficienti in un beamformer data-independent vengono scelti per fornire una risposta fissa del beamformer, indipendentemente dai dati ricevuti.

Nei beamformers ad ottimo statistico la scelta dei coefficienti è tale da ottimizzare la risposta del beamformer in base alla statistica dei dati.

Spesso la statistica dei dati non è nota a priori ed inoltre può essere tempo-variante, in questo modo vengono utilizzati algoritmi adattativi per ottenere coefficienti che convergono alla soluzione statisticamente ottimale.

Considerazioni computazionali obbligano l'uso di beamformers solo parzialmente adattativi, con schiere composte da un grande numero di sensori.

Infine, si è mostrato come si possano seguire diversi approcci per l'implementazione dei beamformers. In Tab. 2.5 vengono ricapitolate le varie tecniche di beamforming viste.

Metodo	Tipo	Criterio	VANTAGGI	SVANTAGGI	Applicabilità alla Radioastronomia.
Classico	Deterministico	I pesi vengono scelti affinché la risposta del beamformer sia massima in direzione del segnale desiderato.	Semplice - Minimizza l'MSE tra risposta effettiva e risposta ideale - Finestrabile per avere controllo sui lobi secondari del beam. - Si estende facilmente al caso 2D - Larga banda	La risposta spaziale e la risposta temporale non sono indipendenti. - Richiede DOA del segnale desiderato.	Buona a livello deterministico.
Generalizzato	Deterministico	I pesi vengono scelti affinché la risposta del beamformer approssimi la risposta desiderata nota a priori (massima nella direzione del segnale desiderato e nulla in direzione delle RFI).	Soppressione efficace delle RFI. - Direzionalità programmabile - Per array planari equispaziati si possono usare in progettazione le tecniche adottate nel filtraggio FIR.	Può essere rumoroso. - Non sono disponibili criteri di progettazione per le funzioni di pesatura degli errori. - Richiede DOA del segnale desiderato e delle RFI.	Molto buona a livello deterministico.
MSC	Deterministico e adattativo	I coefficienti adattativi vengono scelti sulla base di un canale ausiliario in modo da cancellare le RFI dal canale primario.	Metodo consolidato - Semplice - Non sono necessarie le DOA - I coefficienti effettuano un filtraggio sul segnale ausiliario e non sul canale principale, dove invece si ha il transito del segnale radioastronomico.	Talvolta può cancellare il segnale desiderato (quando di intensità elevata) - Il segnale desiderato non deve entrare nel canale ausiliario.	Buona.
REF SIGNAL	Deterministico e adattativo	I coefficienti vengono scelti per massimizzare la verosimiglianza tra il segnale ricevuto ed un segnale dato, detto di riferimento.	Non sono necessarie le DOA	Occorre generare un segnale di riferimento e le prestazioni dipendono fortemente dalla sua validità.	Non applicabile.
MAX SNR	Deterministico e adattativo	I coefficienti vengono scelti per massimizzare il rapporto segnale/rumore.	Vera massimizzazione dell'SNR - Non sono necessarie le DOA	Richiede la conoscenza delle matrici di autocorrelazione \mathbf{R}_s e \mathbf{R}_n - Richiede la risoluzione di un problema agli autovalori.	Scarsa.
LCMV	Deterministico e adattativo	I coefficienti vengono scelti in modo da minimizzare la varianza del segnale in uscita sotto vincoli lineari.	Non sono necessarie a priori le DOA o le matrici di autocorrelazione - può gestire efficientemente le RFI con DOA nota (LCMV) - flessibile - Sperimentato.	Computazionalmente pesante	Buona.

Tabella 2.5: Tabella riassuntiva delle varie tecniche di beamforming.

Capitolo 3

Beamforming deterministico

Nella prima parte di questo capitolo viene effettuata un'analisi comparata delle varie tecniche di beamforming in ambito *deterministico*, ovvero nell'ipotesi in cui la statistica dei segnali in gioco sia completamente nota a priori. Il caso *adattativo* verrà invece trattato nel capitolo successivo.

Nella seconda parte del capitolo si studia l'applicabilità di tali tecniche al sistema BEST-1.

Per far questo, verranno introdotte gradatamente delle simulazioni numeriche di complessità crescente ottenute mediante MATLAB¹.

3.1 Effetti del beamformer sul rapporto segnale/rumore

Si consideri un array lineare composto da N sensori equispaziati a distanza d . Sia d_k la distanza tra il k -esimo sensore dell'array ed il primo:

$$d_k = (k - 1)d \quad (3.1)$$

Una sorgente posta a grande distanza dalla schiera trasmette un segnale monocromatico:

$$s_0(t) = s_0 e^{j2\pi f_0 t} \quad (3.2)$$

la cui ampiezza s_0 è una variabile aleatoria con varianza $E[|s_0|^2] = \sigma_0^2$.

Poichè la sorgente è molto lontana dall'array, il fronte d'onda ai sensori può essere considerato piano. Sotto questa ipotesi, il segnale ricevuto dall' n -esimo sensore è uguale a quello ricevuto dal primo (che viene preso come riferimento) a meno di un ritardo temporale τ_k , cioè a meno di un tempo di propagazione:

¹MATLAB Ver. 6.5.1.199709, ® - The MathWorks Inc.

$$\tau_k = \frac{d_k \sin \theta_0}{c} = \frac{d_k \sin \theta_0}{\lambda f_0} \quad (3.3)$$

dove θ_0 rappresenta la DOA della radiosorgente (rispetto alla normale all'array) e c la velocità della luce (Fig. 3.1).

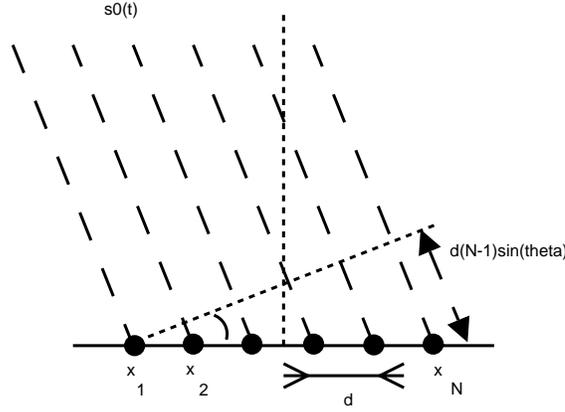


Figura 3.1: Schiera lineare uniforme.

In base a queste considerazioni, il segnale $x_k(t)$ ricevuto dal k -esimo sensore vale:

$$x_k(t) = s_0 e^{j2\pi f_0 t} e^{j2\pi f_0 \tau_k} = s_0(t) e^{j2\pi(k-1) \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0} \quad (3.4)$$

Omettendo per semplicità l'indice temporale t e rappresentando con il vettore $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ i segnali ricevuti dagli N sensori, si ha:

$$\mathbf{x} = s_0 \mathbf{d}_0 \quad (3.5)$$

dove \mathbf{d}_0 rappresenta la risposta della schiera al segnale a banda stretta proveniente dalla direzione θ_0 (*steering vector*):

$$\mathbf{d}_0 = [1 \ e^{j2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0} \ \dots \ e^{j2\pi(N-1) \frac{d}{\lambda} \sin \theta_0}]^T \quad (3.6)$$

Nel seguito si consideri $d = \lambda/2$ a cui corrisponde il vettore:

$$\mathbf{d}_0 = [1 \ e^{j\pi \sin \theta_0} \ \dots \ e^{j\pi(N-1) \sin \theta_0}]^T \quad (3.7)$$

Si assuma ora che il segnale ricevuto dal k -esimo sensore sia affetto da un disturbo n_k , quindi la (3.4) può essere riscritta come:

$$x_k = s_0 e^{j\pi(k-1)\sin\theta_0} + n_k \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

Il rumore complessivo n_k è ipotizzato gaussiano ed incorrelato ai diversi sensori:

$$E[|n_k|^2] = \sigma^2 \quad (3.9)$$

$$E[\Re(n_k)\Im(n_j)] = 0 \quad \forall k, j = 1, 2, \dots, N \quad (3.10)$$

$$E[\Re(n_k)\Re(n_j)] = 0, \quad E[\Im(n_k)\Im(n_j)] = 0, \quad \forall n \neq j \quad (3.11)$$

È conveniente esprimere l'equazione 3.8 in forma vettoriale:

$$\mathbf{x} = s_0 \mathbf{d}_0 + \mathbf{n} \quad (3.12)$$

dove \mathbf{n} è un vettore casuale complesso gaussiano, $\mathbf{n} \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n)$, con media nulla e matrice di covarianza \mathbf{R}_n . Si noti che essendo il disturbo incorrelato ai diversi sensori dell'array, si ha:

$$\mathbf{R}_n = \sigma^2 \mathbf{I}_N \quad (3.13)$$

e che il rapporto segnale/rumore per ciascun sensore assume la forma:

$$SNR_k = \frac{E[|s_0|^2]}{E[|n_k|^2]} = \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \quad (3.14)$$

Al fine di aumentare il rapporto segnale/rumore, è possibile combinare in modo coerente il segnale s_0 proveniente dagli N sensori, compensando i termini di fase $e^{j\pi(k-1)\sin\theta_0}$ espressi in 3.7. È sufficiente infatti moltiplicare l'uscita del k -esimo sensore per il termine $d_k^*(\theta_0) = e^{-j\pi(k-1)\sin\theta_0}$ (per $k = 1, 2, \dots, N$) e successivamente sommare le N uscite. Questo equivale ad eseguire il prodotto tra il vettore dei coefficienti \mathbf{d}_0^H ed il vettore \mathbf{x} :

$$y = \mathbf{d}_0^H \mathbf{x} = \sum_{k=1}^N d_k^*(\theta_0) x_k = y_0 + y_n \quad (3.15)$$

dove:

$$y_0 = s_0 \sum_{k=1}^N e^{-j\pi(k-1)\sin\theta_0} e^{+j\pi(k-1)\sin\theta_0} = N s_0 \quad (3.16)$$

$$y_n = \sum_{k=1}^N e^{-j\pi(k-1)\sin\theta_0} n_k \quad (3.17)$$

In questo modo gli sfasamenti sul segnale s_0 vengono annullati ed è come se l'array venisse ruotato di un angolo θ_0 .

Il rapporto segnale/rumore valutato all'uscita y del beamformer diviene:

$$SNR = \frac{E[|Ns_0|^2]}{E[y_n]^2} = \frac{N^2\sigma_0^2}{N\sigma^2} = N SNR_k \quad (3.18)$$

e dunque viene aumentato di un fattore N rispetto al rapporto segnale/rumore sul singolo sensore. Questo perchè il segnale ricevuto dalla direzione θ_0 si somma in modo coerente, mentre il rumore è incorrelato ai diversi sensori.

3.2 Beamforming deterministico in assenza di RFI

Le tecniche di beamforming consistono nel combinare linearmente le N uscite dell'array con opportuni coefficienti:

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_N]^T \quad (3.19)$$

in modo da ottenere una stima ragionevole y del segnale s_0 :

$$y = \mathbf{w}^H \mathbf{x} = \sum_{k=1}^N w_k^* x_k \quad (3.20)$$

Utilizzando la 3.12, si può esprimere il segnale 3.20 come la somma $y = y_0 + y_n$ di un segnale y_0 dipendente da s_0 e di un termine di rumore y_n :

$$y_0 = s_0 \mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = s_0 \sum_{k=1}^N w_k^* d_k(\theta_0) \quad (3.21)$$

$$y_n = \mathbf{w}^H \mathbf{n} = \sum_{k=1}^N w_k^* n_k \quad (3.22)$$

La potenza del segnale complessivo in uscita sarà

$$P_y = E[|y|^2] = E[yy^*] = E[\mathbf{w}^H \mathbf{x} \mathbf{x}^H \mathbf{w}] = \mathbf{w}^H E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] \mathbf{w} \quad (3.23)$$

ovvero

$$P_y = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (3.24)$$

che, come si può vedere, dipende dalla matrice di covarianza del vettore \mathbf{x} :

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \sigma_0^2 \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_n \quad (3.25)$$

Il generico elemento $r_{i,j} = E[y_i y_j^*]$ rappresenta la correlazione tra l' i -esimo ed il j -esimo sensore dell'array, cioè è uguale alla somma della covarianza di segnale \mathbf{R}_0 e della covarianza di rumore \mathbf{R}_n . Dal calcolo della potenza di segnale P_0 e di rumore P_n :

$$P_0 = E[|y_0|^2] = E[y_0 y_0^*] = E[\mathbf{w}^H s_0 \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_0^H s_0^* \mathbf{w}] = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_0 \mathbf{w} = \sigma_0^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0|^2 \quad (3.26)$$

$$P_n = E[|y_n|^2] = E[\mathbf{w} \mathbf{n} \mathbf{n}^H \mathbf{w}^H] = \mathbf{w} E[\mathbf{n} \mathbf{n}^H] \mathbf{w} = \mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w} \quad (3.27)$$

segue che il rapporto segnale/rumore all'uscita dal beamformer è

$$SNR_y = \frac{P_0}{P_n} = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_0 \mathbf{w}}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}} \quad (3.28)$$

che, nel caso di rumore bianco, $\mathbf{R}_n = \sigma^2 \mathbf{I}_N$, si riduce a:

$$SNR_y = \frac{\sigma_0^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0|^2}{\sigma^2 \|\mathbf{w}\|^2} \quad (3.29)$$

3.2.1 Beamforming classico

Nel beamforming classico, il vettore dei coefficienti \mathbf{w} è una versione normalizzata dello steering vector \mathbf{d}_0 :

$$\mathbf{w}_o = \frac{1}{N} \mathbf{d}_0 \quad (3.30)$$

Si dimostra che in caso di rumore bianco ($\mathbf{R}_n = \sigma^2 \mathbf{I}$), \mathbf{w}_o è la scelta che massimizza il rapporto segnale/rumore SNR_y , infatti la potenza del segnale utile all'uscita del beamformer è uguale alla potenza del segnale associato alla radiosorgente:

$$P_0 = \sigma_0^2 |\mathbf{w}_o^H \mathbf{d}_0|^2 = \sigma_0^2 \left(\frac{1}{N} \mathbf{d}_0^H \mathbf{d}_0 \right)^2 = \sigma_0^2 \quad (3.31)$$

e la potenza di rumore in uscita dal beamformer invece vale

$$P_n = \sigma^2 \|\mathbf{w}_o\|^2 = \sigma^2 \frac{1}{N^2} \mathbf{d}_0^H \mathbf{d}_0 = \frac{\sigma^2}{N} \quad (3.32)$$

da cui

$$SNR_y = \frac{P_0}{P_n} = N \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \quad (3.33)$$

che è il risultato dell'equazione 3.18.

E' interessante calcolare la risposta $r(\theta, \theta_0)$ di questo particolare beamformer ($d = \lambda/2$) ad un generico segnale proveniente da una certa direzione θ :

$$\begin{aligned} r(\theta, \theta_0) &= \mathbf{w}_0^H \mathbf{d}(\theta) = \sum_{k=1}^N e^{-j\pi(k-1)\sin\theta_0} e^{+j\pi(k-1)\sin\theta} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\pi k(\sin\theta - \sin\theta_0)} = \\ &= \frac{1 - e^{-j\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)N}}{1 - e^{-j\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)}} = e^{-j\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)(N-1)/2} \frac{\sin(\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)N/2)}{\sin(\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)/2)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Il guadagno del beamformer al variare di θ è quindi descritto da una funzione seno cardinale periodico:

$$G(\theta, \theta_0) = \frac{|r(\theta, \theta_0)|^2}{|r(\theta_0, \theta_0)|^2} = \left(\frac{\sin(\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)N/2)}{N \sin(\pi(\sin\theta - \sin\theta_0)/2)} \right)^2 \quad (3.35)$$

Dunque, nel caso di $d = \lambda/2$, la funzione $G(\theta, \theta_0)$ ha $N - 1$ zeri, infatti il numeratore della 3.35 si annulla per

$$\pi(\sin\theta - \sin\theta_0) \frac{N}{2} = k\pi \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.36)$$

cioè per

$$\theta_k = \arcsin(\sin\theta_0 + k \frac{2}{N}) \quad (3.37)$$

Per $\theta_0 = 0$ la funzione 3.35 si semplifica

$$G(\theta, 0) = \left(\frac{\sin(\pi \sin\theta N/2)}{N \sin(\pi \sin\theta/2)} \right)^2 \quad (3.38)$$

con zeri in

$$\theta_k = \arcsin \frac{2k}{N} \quad k = \pm 1, \pm 2 \dots \pm (N/2) \quad (3.39)$$

Il beampattern è composto da un lobo principale di larghezza

$$\Delta\theta = 2\arcsin(2/N) \quad (3.40)$$

ed ha $N - 1$ lobi secondari.

Si noti che a causa della conversione pulsazione spaziale - angolo, gli zeri non sono equispaziati, la distanza tra due zeri successivi cresce all'aumentare dell'angolo θ . Analogamente la larghezza del lobo principale è tanto maggiore quanto più la direzione θ_0 è lontana dalla normale. Questo significa che il beamforming ha la massima risoluzione per $\theta_0 = 0$. Questa proprietà è illustrata con due esempi in Fig. 3.2. Il primo grafico mostra il guadagno $G(\theta, \theta_0)$ per $\theta_0 = 0^\circ$ ed il secondo per $\theta_0 = 30^\circ$. Si osserva come in entrambi i casi gli zeri non sono equispaziati, con spaziatura crescente all'aumentare dell'angolo θ . Per $\theta_0 = 0^\circ$ il beampattern è simmetrico, mentre non lo è per $\theta_0 = 30^\circ$. Inoltre il lobo principale è maggiore nel secondo grafico, e quindi la risoluzione del beamformer ottenuta per $\theta_0 = 30^\circ$ è inferiore rispetto alla risoluzione al primo caso.

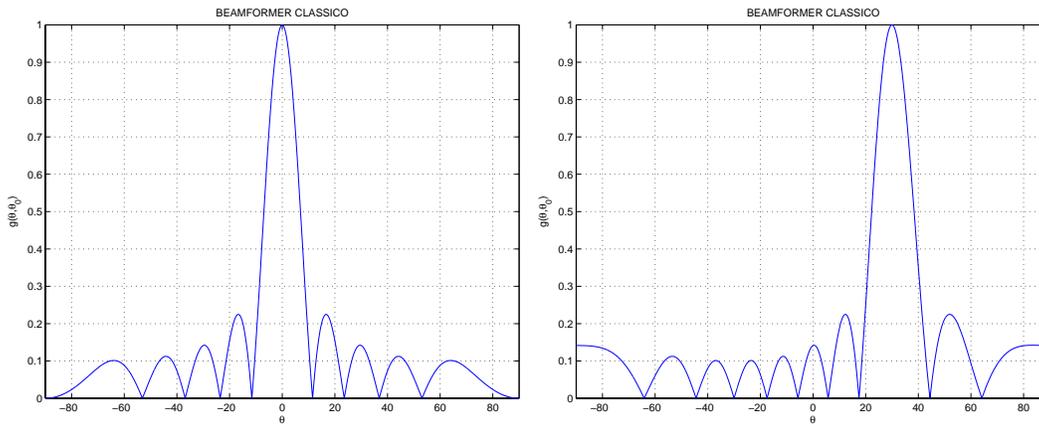


Figura 3.2: Guadagno di un beamformer classico ottenuto per $N = 10$. Nel primo caso si ha $\theta_0 = 0^\circ$ mentre nel secondo caso $\theta_0 = 30^\circ$.

3.2.2 Beamforming MMSE

La soluzione che minimizza l'errore quadratico medio tra la risposta effettiva del beamformer e quella desiderata

$$E[|\epsilon|^2] = E[|s_0 - \mathbf{w}^H \mathbf{x}|^2] \quad (3.41)$$

si ottiene applicando il principio di ortogonalità statistica:

$$E[(s_0 - \mathbf{w}^H \mathbf{x}) \mathbf{x}^H] = 0 \quad (3.42)$$

da cui segue:

$$E[s_0 \mathbf{x}^H] = \mathbf{w}^H E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] \quad (3.43)$$

$$E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H] \mathbf{w} = E[s_0^* \mathbf{x}] \quad (3.44)$$

$$\mathbf{w} = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H]^{-1} E[s_0^* \mathbf{x}] = \mathbf{R}^{-1} E[(\mathbf{d}_0 s_0 + \mathbf{n}) s_0^*] = \sigma_0^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.45)$$

La stima MMSE è quindi:

$$\mathbf{w} = \sigma_0^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.46)$$

Nel caso di rumore bianco di potenza σ^2 , la soluzione MMSE può essere riscritta nel modo seguente:

$$\mathbf{w} = \sigma_0^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0 = \sigma_0^2 (\sigma_0^2 \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{d}_0 = \rho (\mathbf{I} + \rho \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_0^H)^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.47)$$

dove $\rho = \sigma_0^2 / \sigma^2$.

Si dimostra² che la soluzione risulta essere:

$$\mathbf{w} = \frac{\rho}{1 + N\rho} \mathbf{d}_0 \quad (3.48)$$

Si osserva dunque che se $\rho \rightarrow \infty$ la soluzione MMSE tende al beamforming classico, viceversa se $\rho \rightarrow 0$ tende a zero (Fig. 3.3).

3.3 Beamforming deterministico in presenza di RFI

In presenza di K interferenti, il segnale ricevuto dall'array può essere rappresentato come la somma del segnale utile \mathbf{x}_0 e di un rumore correlato $\mathbf{n} \sim CN(\mathbf{0}, \mathbf{R}_n)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{n} \quad (3.49)$$

²Si vedi ad es. [17].

dove \mathbf{n} include sia il rumore incorrelato $\mathbf{n}_b \sim CN(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ che il rumore correlato generato dai K interferenti $s_k \sim CN(0, \sigma_k^2)$:

$$\mathbf{n} = \sum_{k=1}^K \mathbf{d}_k s_k + \mathbf{n}_b \quad (3.50)$$

Assumendo l'incorrelazione tra le diverse sorgenti e l'incorrelazione tra rumore e sorgenti, la matrice di covarianza del vettore \mathbf{x} può essere espressa come

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}\mathbf{x}^H] = \sigma_0^2 \mathbf{d}_0 \mathbf{d}_0^H + \mathbf{R}_n \quad (3.51)$$

dove \mathbf{R}_n rappresenta la matrice di covarianza di interferenza e rumore

$$\mathbf{R}_n = E[\mathbf{n}\mathbf{n}^H] = \sigma^2 \mathbf{I} + \sum_{k=1}^K \sigma_k^2 \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^H \quad (3.52)$$

3.3.1 Beamforming con null steering

Nel null steering beamforming il vettore dei coefficienti \mathbf{w} viene calcolato in modo da forzare una risposta nulla del beamformer in direzione delle RFI e garantire un guadagno unitario in direzione del segnale utile. Si assuma ad esempio di avere $K = N - 1$ interferenti con direzioni ben distinte e

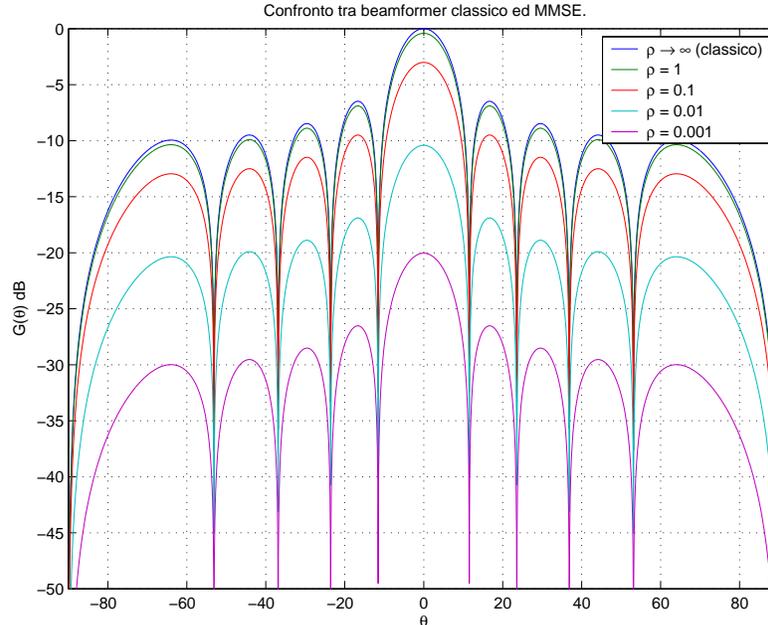


Figura 3.3: Confronto tra beamformer classico e beamformer MMSE per diversi valori di ρ ($N = 10$).

$$\begin{cases} \mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = 1 \\ \mathbf{w}^H \mathbf{d}_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, K \end{cases} \quad (3.53)$$

o equivalentemente:

$$\mathbf{A} \mathbf{w} = \mathbf{u} \quad (3.54)$$

dove

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

e

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_K]^H \quad (3.56)$$

Se la matrice \mathbf{A} è invertibile, la soluzione è data da:

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \quad (3.57)$$

Nel caso in cui sia $K < N - 1$ allora la matrice \mathbf{A} non è quadrata. In tal caso una possibile soluzione si può ottenere mediante la matrice pseudo-inversa di \mathbf{A} :

$$\mathbf{w} = \mathbf{A}^H (\mathbf{A} \mathbf{A}^H)^{-1} \mathbf{u} \quad (3.58)$$

Si noti che poichè il sistema ha N incognite (e dunque N gradi di libertà) non è possibile imporre complessivamente più di N vincoli. Tuttavia se si impongono N vincoli, non si è in grado di garantire che il beam risulti puntato in direzione θ_0 . Perchè questo avvenga occorre tenere presente che nel beamformer un coefficiente viene preso a riferimento, pertanto il numero complessivo di gradi di libertà effettivo risulta essere $N - 1$. Dunque non è possibile imporre complessivamente più di $N - 1$ vincoli. Poichè un grado di libertà viene richiesto per il controllo del beam, il numero massimo di RFI reiettabili risulta essere $N - 2$ (Fig. 3.4).

Un altro esempio di null steering con $N = 10$ è mostrato in Fig. 3.5. I coefficienti sono stati calcolati in modo da forzare un guadagno nullo in corrispondenza delle direzioni $\theta_1 = -20^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\theta_3 = 50^\circ$ e $\theta_4 = 70^\circ$ ed un guadagno unitario in direzione $\theta_0 = 0^\circ$.

Si osservi che il null steering impone un guadagno nullo in corrispondenza degli interferenti ma non minimizza la potenza del rumore in uscita, cioè del rumore incorrelato di fondo \mathbf{n}_b . Pertanto non

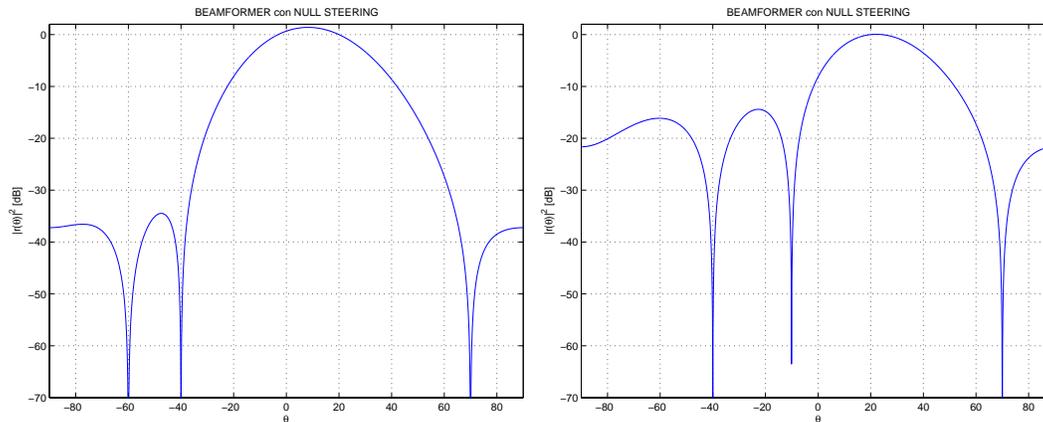


Figura 3.4: Esempi di beampatterns ottenuti mediante null steering. Il beamformer è composto da $N = 4$ sensori ma se si impongono N vincoli (prima figura) il beam non risulta più puntato in direzione della radiosorgente ($\theta_0 = +20^\circ$). Nel primo si è posto uno zero in direzione di $\theta_1 = -60^\circ$, $\theta_2 = -40^\circ$ e $\theta_3 = +70^\circ$, utilizzando tutti i gradi di libertà a disposizione. Nel secondo non è stato posto lo zero in direzione $\theta_1 = -60^\circ$ ed il puntamento risulta corretto.

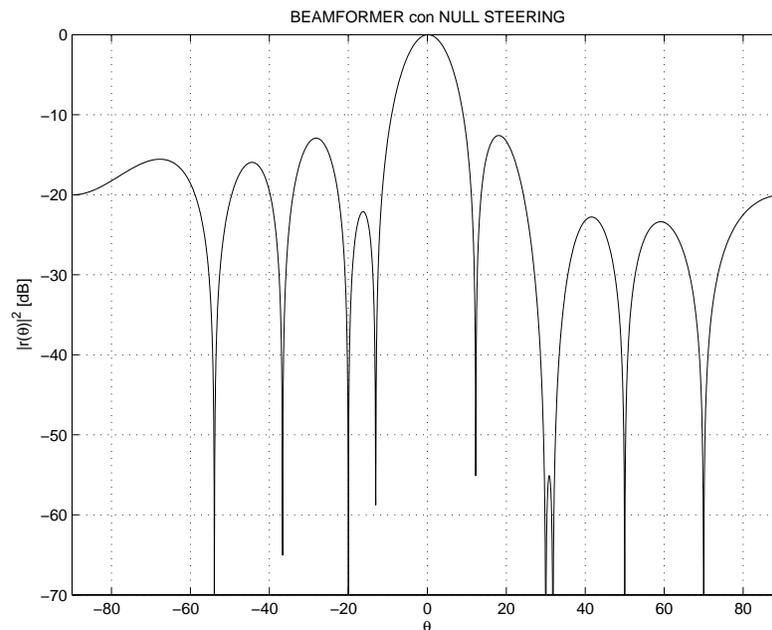


Figura 3.5: Esempio di beampattern ottenuto con tecnica null steering ($N = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_1 = -20^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\theta_3 = 50^\circ$ e $\theta_4 = 70^\circ$).

è la soluzione ottimale. Per minimizzare la potenza di rumore in uscita si deve ricorrere ad altri metodi descritti nei paragrafi seguenti.

3.3.2 Guadagni arbitrari in direzioni arbitrarie

Un altro aspetto interessante dell'algoritmo di null steering è la possibilità di porre un guadagno arbitrario (non necessariamente nullo dunque) in certe direzioni. Questo potrebbe risultare interessante qualora si voglia evitare una deformazione eccessiva del beampattern. Se si desidera un guadagno G_{dB} volte inferiore al massimo in direzione θ_k è sufficiente porre come vincolo:

$$r(\theta_k) = 10^{\frac{G_{dB}}{20}} \quad (3.59)$$

In Fig. 3.6 viene riportato un esempio di beamformer ottenuto con un vincolo di questo tipo.

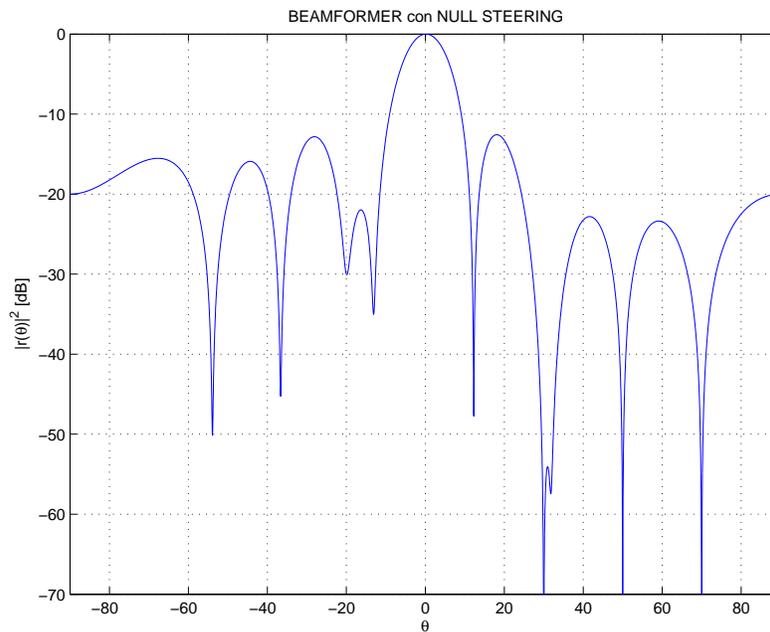


Figura 3.6: In questo beampattern è stata posta arbitrariamente un'attenuazione di $30dB$ rispetto al massimo guadagno in direzione di θ_1 . ($N = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_1 = -20^\circ$, $\theta_2 = 30^\circ$, $\theta_3 = 50^\circ$ e $\theta_4 = 70^\circ$).

3.3.3 Beamforming MVDR

Nel MVDR si calcola il vettore dei coefficienti \mathbf{w}_{opt} che minimizza la potenza complessiva in uscita dal beamformer ($P_y = \mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}$) sotto il vincolo lineare di guadagno unitario ($\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = 1$) nella direzione del segnale desiderato ($\mathbf{d}_0 = \mathbf{d}(\theta_0)$). Ovvero si vuole risolvere il problema:

$$\mathbf{w}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{w}} [P_y] = \arg \min_{\mathbf{w}} [\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w}] \quad s.v. \quad \mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = 1 \quad (3.60)$$

con la solita notazione introdotta nei capitoli precedenti. Si tratta di un problema di minimo vincolato che si risolve mediante i moltiplicatori di Lagrange:

$$\mathbf{w}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{w}} [\mathbf{w}^H \mathbf{R} \mathbf{w} + \lambda (\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 - 1)] \quad (3.61)$$

Il punto di minimo si ricava uguagliando a zero le derivate parziali dell'argomento della 3.61 rispetto a \mathbf{w} e λ :

$$\begin{cases} \mathbf{R} \mathbf{w} + \lambda \mathbf{d}_0 = 0 \\ \mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

da cui si ricava:

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \lambda \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0 \\ \lambda = \frac{1}{\mathbf{d}_0^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0} \end{cases} \quad (3.63)$$

e dunque la soluzione:

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{\mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0}{\mathbf{d}_0^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0} \quad (3.64)$$

Si osservi che il termine al denominatore è un valore scalare che serve semplicemente a soddisfare il vincolo $\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = 1$, cioè ad avere guadagno unitario in direzione θ_0 .

L'effetto del beamformer MVDR è una risposta unitaria in direzione della radiosorgente θ_0 ed un'attenuazione in corrispondenza degli interferenti θ_k .

In Fig. 3.7 vengono confrontati i beamformers ottenuti mediante metodo classico e MVDR, nel caso di $K = 3$ interferenti ed $N = 10$. La capacità di reiezione dell'interferenza dipende chiaramente dalla separazione tra interferente e segnale utile $|\theta_k - \theta_0|$, dalla risoluzione dell'array (cioè dal numero di antenne) e dalla potenza degli interferenti. Se $\theta_k \simeq \theta_0$ non è possibile mettere uno zero sull'interferente perchè il lobo principale per N finito ha larghezza finita. *Si osservi inoltre che se σ^2 è molto piccolo allora \mathbf{R}_n non può essere invertibile.* Nella realtà la presenza del rumore di sistema rende sempre invertibile la matrice.

Poichè è stato imposto il vincolo $\mathbf{w}^H \mathbf{d}_0 = 1$, si ha $P_0 = \sigma_0^2$ ed il rapporto segnale/rumore si riduce a

$$SNR_y = \sigma_0^2 \mathbf{d}_0^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.65)$$

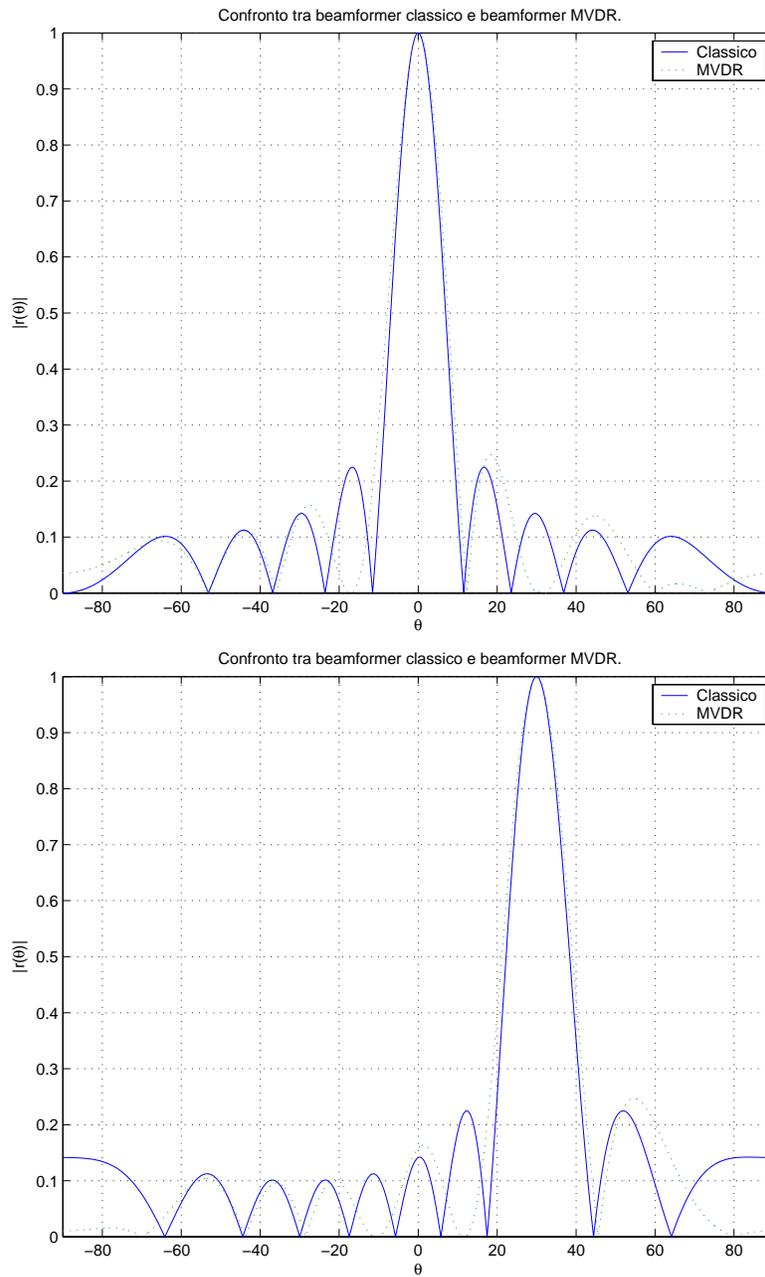


Figura 3.7: Confronto tra beamformers classico e MVDR. Nel primo caso si ha $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_1 = 30^\circ$, $\theta_2 = 60^\circ$ e $\theta_3 = -17^\circ$ mentre nel secondo si ha $\theta_0 = 0^\circ$, $\theta_1 = -10^\circ$, $\theta_2 = 12^\circ$ e $\theta_3 = 80^\circ$. Per entrambi vale $N = 10$, $d = \lambda/2$ e $\sigma^2 = 0.001$. NOTA: in questi grafici è stata adottata la scala lineare perchè meglio adatta a questo genere di confronti.

Infatti, dalla 3.28 segue

$$SNR_y = \frac{\sigma_0^2}{\mathbf{w}_0^H \mathbf{R}_n \mathbf{w}_0} = \sigma_0^2 \mathbf{d}_0^H \mathbf{R}_n \mathbf{d}_0 \quad (3.66)$$

Se si ha solo rumore bianco, si verifica facilmente che il beamformer MVDR si riduce a

$$\mathbf{w}_0 = \frac{1}{N} \mathbf{d}_0 \quad (3.67)$$

e quindi coincide con il beamformer classico 3.30. Infatti il rapporto segnale/rumore (3.65) diviene $N\sigma_0^2/\sigma^2$.

Se si ha un solo interferente $\mathbf{d}_1 s_1$ con potenza $\sigma_1^2 \gg \sigma$, si ha $\sigma^2 \simeq \sigma_1^2$ ed il rapporto segnale/rumore si riduce a

$$SNR \simeq N \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \rho \quad (3.68)$$

dove ρ dipende dal beamformer classico \mathbf{d}_1 :

$$\rho = 1 - \mathbf{w}_0^H \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1^H \mathbf{w}_0 \quad (3.69)$$

Questo significa che quanto più i segnali interferente ed utile sono spazialmente separati ($\mathbf{w}_0^H \mathbf{d}_1 \simeq 0$ e $\rho \simeq 1$), tanto più il guadagno tende a quello del beamformer convenzionale in assenza di interferenza, cioè il massimo SNR in assoluto. In questo caso il beamformer cancella totalmente l'interferenza.

3.3.4 Beamforming MMSE

La soluzione che minimizza l'errore quadratico medio tra la risposta effettiva del beamformer e quella desiderata

$$E[|\epsilon|^2] = E[|s_0 - \mathbf{w}^H \mathbf{x}|^2] \quad (3.70)$$

si ottiene applicando il principio di ortogonalità statistica:

$$E[(s_0 - \mathbf{w}^H \mathbf{x}) \mathbf{x}^H] = 0 \quad (3.71)$$

da cui segue:

$$\mathbf{w} = E[\mathbf{x} \mathbf{x}^H]^{-1} E[s_0^* \mathbf{x}] = \sigma_0^2 \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.72)$$

Si osserva che la soluzione MMSE è uguale a quella MVDR a meno di un fattore $\sigma_0^2/(\mathbf{d}_0^H \mathbf{R}^{-1} \mathbf{d}_0)$. L'effetto è ancora una volta quello di attenuare gli interferenti ma in questo caso la soluzione dipende dal rapporto segnale/rumore+interferenza: se $\sigma_0^2/(\sigma^2 + \sigma_1^2)$ tende a zero allora $\mathbf{w} \rightarrow 0$, se $\sigma_0^2/(\sigma^2 + \sigma_1^2)$ è molto grande allora la soluzione tende al beamformer MVDR.

È facile verificare che

$$\mathbf{R}^{-1} = \frac{\sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2 \mathbf{d}_0^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}_0} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.73)$$

e dunque la soluzione MMSE per rumore correlato con covarianza \mathbf{R}_n risulta essere

$$\mathbf{w} = \frac{\sigma_0^2}{1 + \sigma_0^2 \mathbf{d}_0^H \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}_0} \mathbf{R}_n^{-1} \mathbf{d}_0 \quad (3.74)$$

3.4 Beamforming deterministico con BEST-1

BEST-1 è un *array* che consiste di 4 *sensori* distanti $16\lambda/2$ a $408MHz$. Ciascun sensore si compone a sua volta di 16 *dipoli* in parallelo, distanziati tra loro di $\lambda/2$. I parametri fisici di BEST-1 implicano delle considerazioni di non poco conto sui limiti del suo beampattern. In questo capitolo si studieranno gli effetti che questi producono sul beamforming deterministico. Per far questo, verranno introdotti gradatamente degli esempi numerici di complessità crescente ottenuti mediante MATLAB.

3.4.1 Equivocazione spaziale e lobi di grating

Nella Fig. 3.8 è possibile osservare quali siano gli effetti sul beampattern dovuti al numero N di sensori usati per comporre un generico array. In questo caso si sono usati rispettivamente 4,8,16 e 32 sensori ideali (omnidirezionali), distanziati tra loro di $\lambda/2$. In tutti e quattro i casi si è preso per semplicità un angolo di puntamento nullo, di 0° . Si osservi che al crescere di N il lobo principale si restringe ed il livello medio dei lobi secondari si abbassa, mentre il numero di lobi aumenta. Al crescere del numero dei lobi secondari crescono però anche gli $N - 1$ zeri del beampattern. Il primo lobo secondario si trova sempre circa $-13dB$ rispetto al lobo primario³. È il caso più semplice di beamformer, in cui tutti i coefficienti hanno modulo unitario e fase nulla.

Il caso $N = 16$ risulta particolarmente interessante, poichè, come si vedrà in seguito, nel caso di BEST-1 rappresenta con buona approssimazione il beampattern del singolo sensore che compone l'array. Ogni sensore infatti, ha la sua propria funzione di direttività che, come insegna la teoria

³Per una dimostrazione si veda ad esempio [9].

delle antenne⁴, può essere ricavata dal prodotto tra la funzione di direttività del singolo elemento (il dipolo $\lambda/2$) e la funzione di direttività di gruppo (l'array costituito da 16 elementi):

$$f(\theta, \phi) = f_{el}(\theta, \phi) \cdot f_{gr}(\theta, \phi) \quad (3.75)$$

Si osservi che quando il numero degli elementi che compongono un array è sufficientemente elevato, la funzione di direttività totale è approssimabile con la funzione di direttività di gruppo:

$$f(\theta, \phi) \cong f_{gr}(\theta, \phi) \quad \text{per } N \gg 1 \quad (3.76)$$

In termini ingegneristici questo equivale a dire che al crescere di N la risposta del beamformer diventa via via sempre più indipendente dalla risposta dei singoli sensori che lo compongono.

Nella Fig. 3.9, i coefficienti del beamformer subiscono un finestramento secondo Hamming. Si può notare che il lobo principale si allarga notevolmente, pur tendendo sempre a restringersi al crescere di N . Gli zeri non sono più $N - 1$. A differenza dei beampattern mostrati nella figura precedente il livello dei lobi secondari risulta nettamente inferiore.

In Fig. 3.10 è possibile osservare 4 diversi puntamenti, rispettivamente a 20° , 40° , 60° e 80° mediante un array composto da 8 sensori spazati di $\lambda/2$. Si può vedere come il beam si sposti gradatamente verso destra. Si osservi come per elevati angoli di puntamento il lobo principale si deformi e venga a crearsi un lobo esattamente dall'estremo opposto⁵. L'effetto è ancora più visibile nella Fig. 3.11, dove sono stati impiegati 16 sensori. Tuttavia il degrado del beam avviene più tardi, per angoli di puntamento maggiori.

Le Fig. 3.12 e 3.13 riportano gli stessi beamformers, con l'aggiunta del finestramento dei coefficienti. Il finestramento attenua l'effetto dei lobi secondari ma diminuisce il numero complessivo di zeri nel beampattern.

Finora è stata adottata una spaziatura tra i sensori di $\lambda/2$. Questo perchè *secondo il teorema del campionamento è la distanza massima alla quale possono essere collocati i sensori senza che avvenga equivocazione spaziale*. Tuttavia nulla vieta di posizionare i sensori anche ad una distanza minore (che, nel caso di campionamento temporale è equivalente ad utilizzare una frequenza di campionamento maggiore di quella minima), anche se è sempre vantaggioso che l'array possieda la massima apertura possibile, perchè a tale apertura corrisponde anche la massima risoluzione spaziale. Le Figg. 3.14 e 3.15 riportano degli esempi di beampattern (senza finestramento) ottenuti mediante 8 e 16 sensori distanziati di $\lambda/4$. Si noti come il beam si sia allargato, segno proprio dell'avvenuta perdita di risoluzione spaziale.

Ma cosa succede al beampattern quando la spaziatura tra i sensori è maggiore di $\lambda/2$? Questo caso

⁴Vedi [2].

⁵Questo curioso fenomeno è legato alla particolare spaziatura tra i sensori scelta in questo caso. La distanza di $\lambda/2$ rende del tutto equivalente i puntamenti a $\pm 90^\circ$ perchè fa sì che i due angoli producano gli stessi steering vectors. In Fig. 3.14, dove è stata adottata una spaziatura di $\lambda/4$ ciò non si verifica.

è particolarmente interessante, in quanto è proprio quello che si ha in BEST-1. Esattamente come per il campionamento spaziale, si ha un fenomeno di *aliasing*, cioè di equivocazione spaziale. In altre parole *le DOA risultano ambigue*. Si osservi la Fig. 3.16. Nel primo caso 4 sensori vengono distanziati di 1λ . Il beam raddoppia ed appare un nuovo beam (*ghost beam*) a $\pm 90^\circ$, frutto del sottocampionamento spaziale. Segnali provenienti da 0° risultano assolutamente indistinguibili da segnali provenienti da $\pm 90^\circ$. Nel secondo caso la distanza tra i sensori è 2λ ed il beam si quadruplica. Risultati analoghi di hanno per il terzo ed il quarto caso. L'ultimo caso è anche quello più interessante, poiché è proprio il caso di BEST-1 in cui si hanno quattro sensori distanziati di $16\lambda/2$. Il main beam risulta essere equivocato 16 volte. La Fig. 3.17 analizza in modo più approfondito l'ultimo caso andando a vedere cosa succede per diversi angoli di puntamento. Si osservi che per via dell'equivocazione spaziale, le direzioni di puntamento disponibili risultano effettivamente ridotte. In altre parole, a DOA differenti vengono associati gli stessi steering vectors.

Le repliche equivocate del beam prendono il nome di lobi di grating e si può dimostrare (vedi [11]) che per una distanza d_λ tra i sensori, risultano essere equispaziati di:

$$\phi_G = \arcsin\left(\frac{1}{d_\lambda}\right) \quad [rad] \quad (3.77)$$

Se $d_\lambda \gg 1$ vale l'approssimazione:

$$\phi_G \simeq \frac{1}{d_\lambda} \quad [rad] \quad (3.78)$$

Inoltre i lobi principali si restringono e l'apertura del fascio a mezza potenza (HPBW⁶) si riduce a circa

$$HPBW \simeq \frac{1}{Nd_\lambda} \quad [rad] \quad (3.79)$$

mentre la distanza tra i primi due zeri (BWFN⁷) a circa

$$BWFN \simeq \frac{2}{Nd_\lambda} \quad [rad] \quad (3.80)$$

dove N è il numero di sensori che compone l'array.

Nei paragrafi che seguono, i concetti del tutto generali esposti in questo paragrafo verranno applicati più approfonditamente al caso BEST-1.

⁶Half Power BeamWidth.

⁷BeamWidth between First Nulls

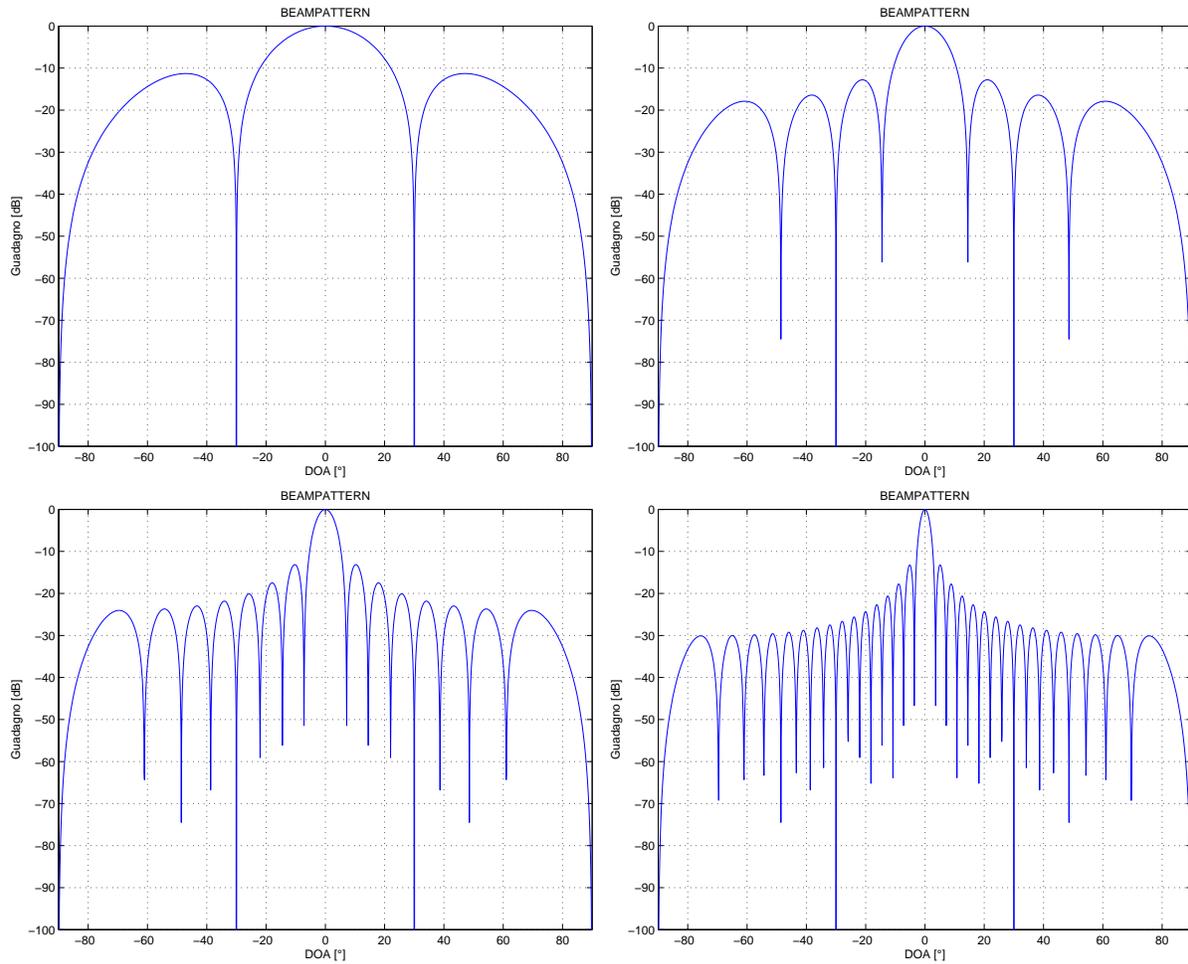


Figura 3.8: Effetti del numero di sensori sul beampattern per $N = 4, 8, 16, 32$. Sensori ideali omnidirezionali, spazati di $\lambda/2$. Il caso $N = 16$ risulta particolarmente interessante poichè rappresenta con buona approssimazione il beampattern del sensore utilizzato in BEST1.

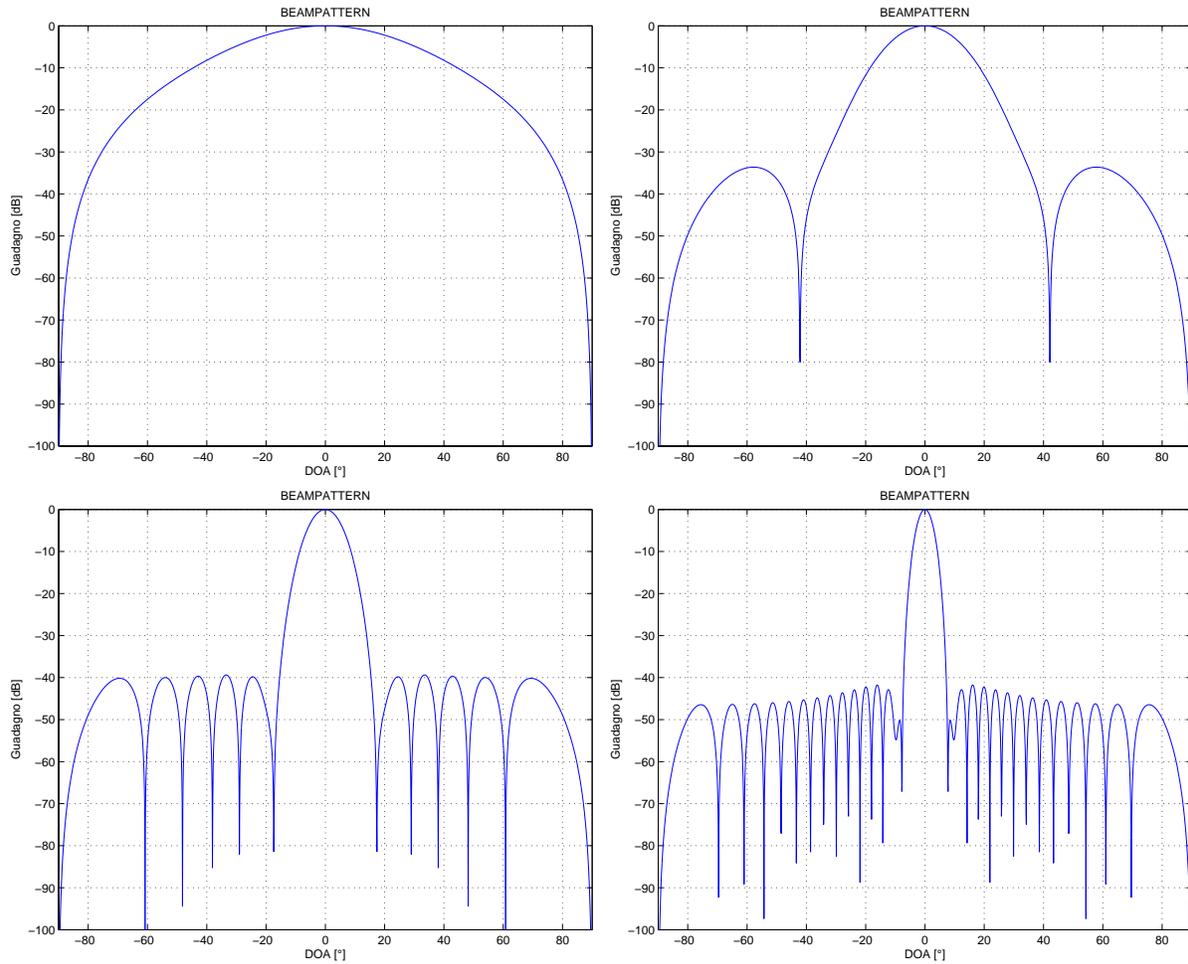


Figura 3.9: Effetti del finestramento dei coefficienti sul beampattern ($N = 4, 8, 16, 32$). Sensori ideali omnidirezionali, spazati di $\lambda/2$ e finestra di Hamming.

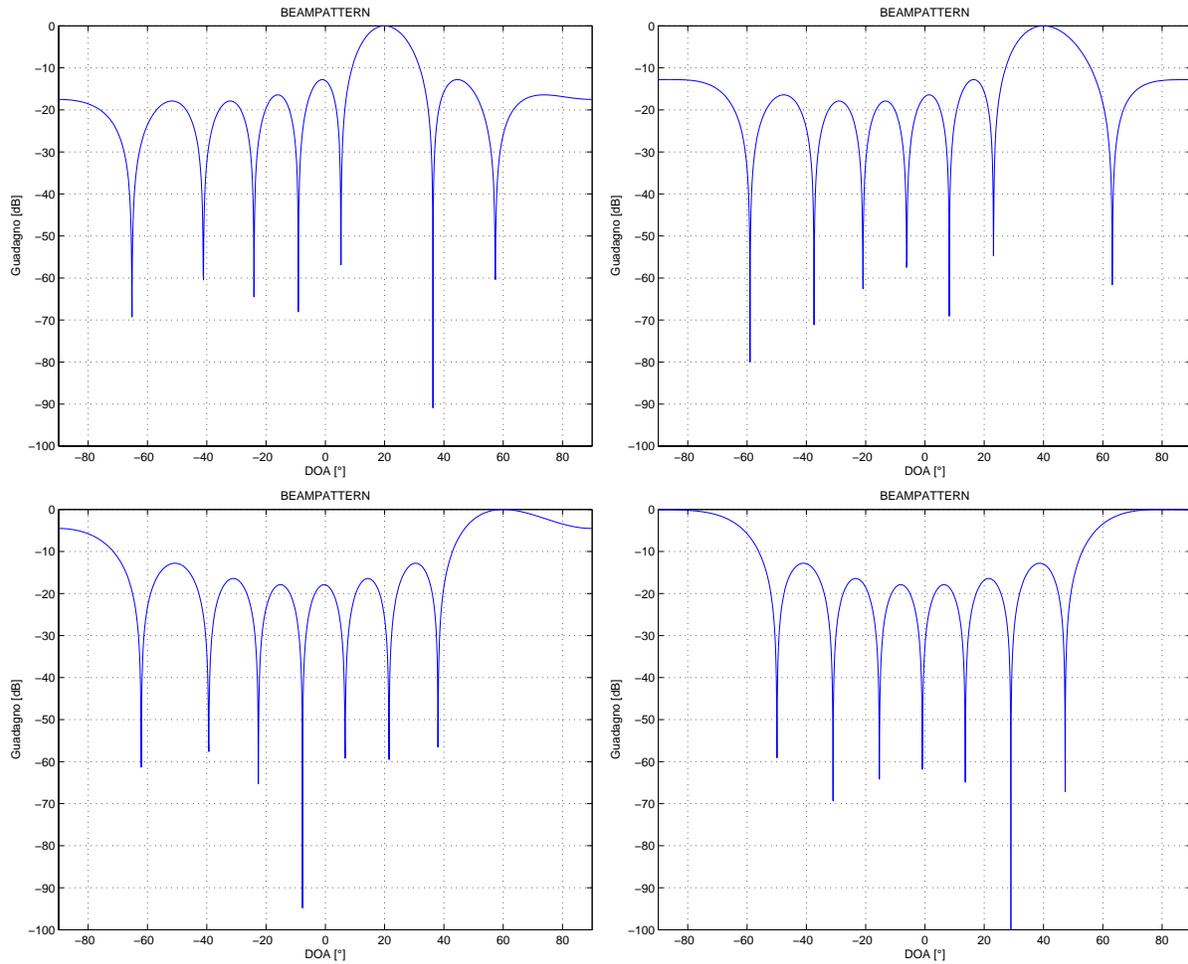


Figura 3.10: Effetti del puntamento elettronico del fascio sulla figura complessiva del beampattern $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Sensori ideali ($N = 8$) omnidirezionali, spazati di $\lambda/2$.

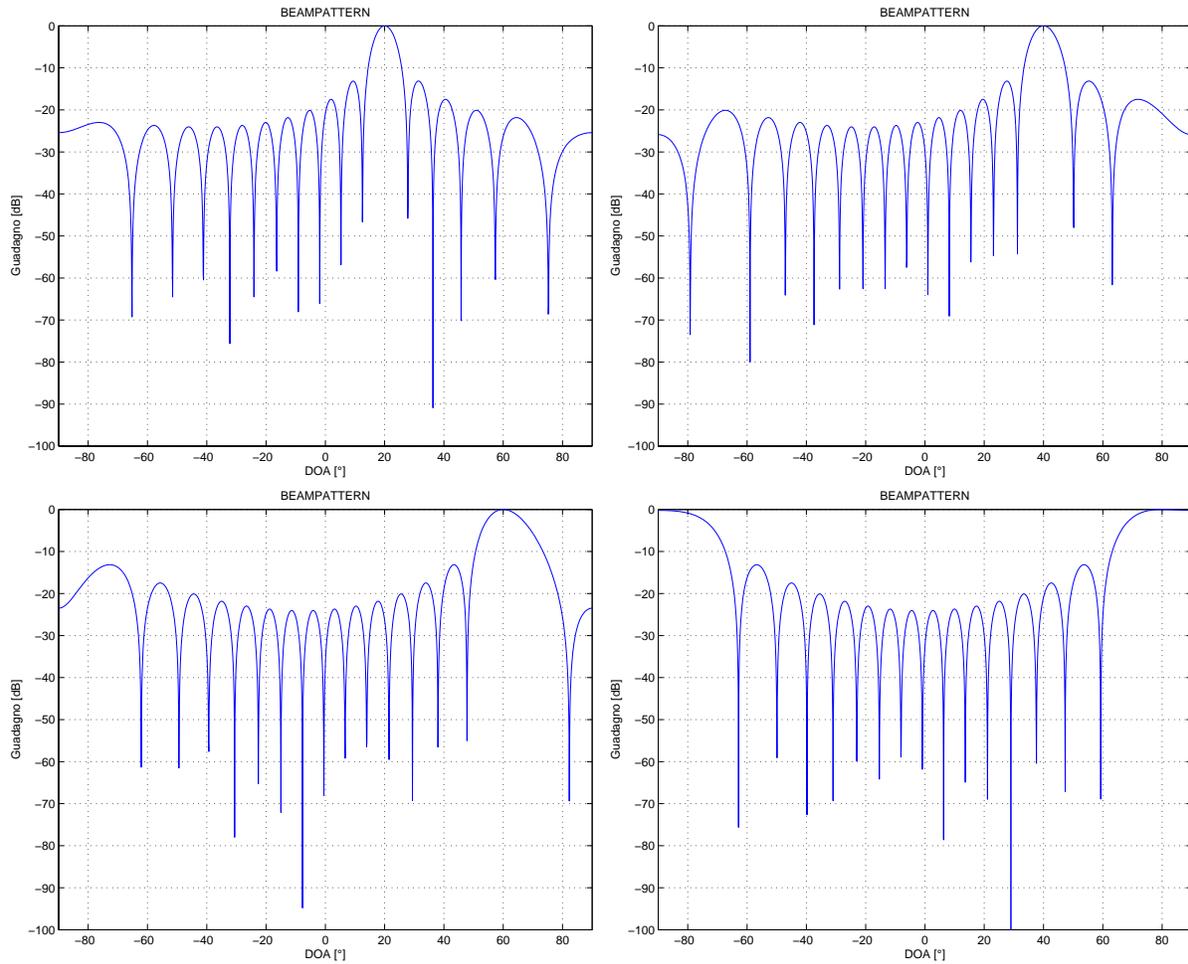


Figura 3.11: Effetti del puntamento elettronico del fascio sulla figura complessiva del beampattern $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Sensori ideali ($N = 16$) omnidirezionali, spazati di $\lambda/2$.

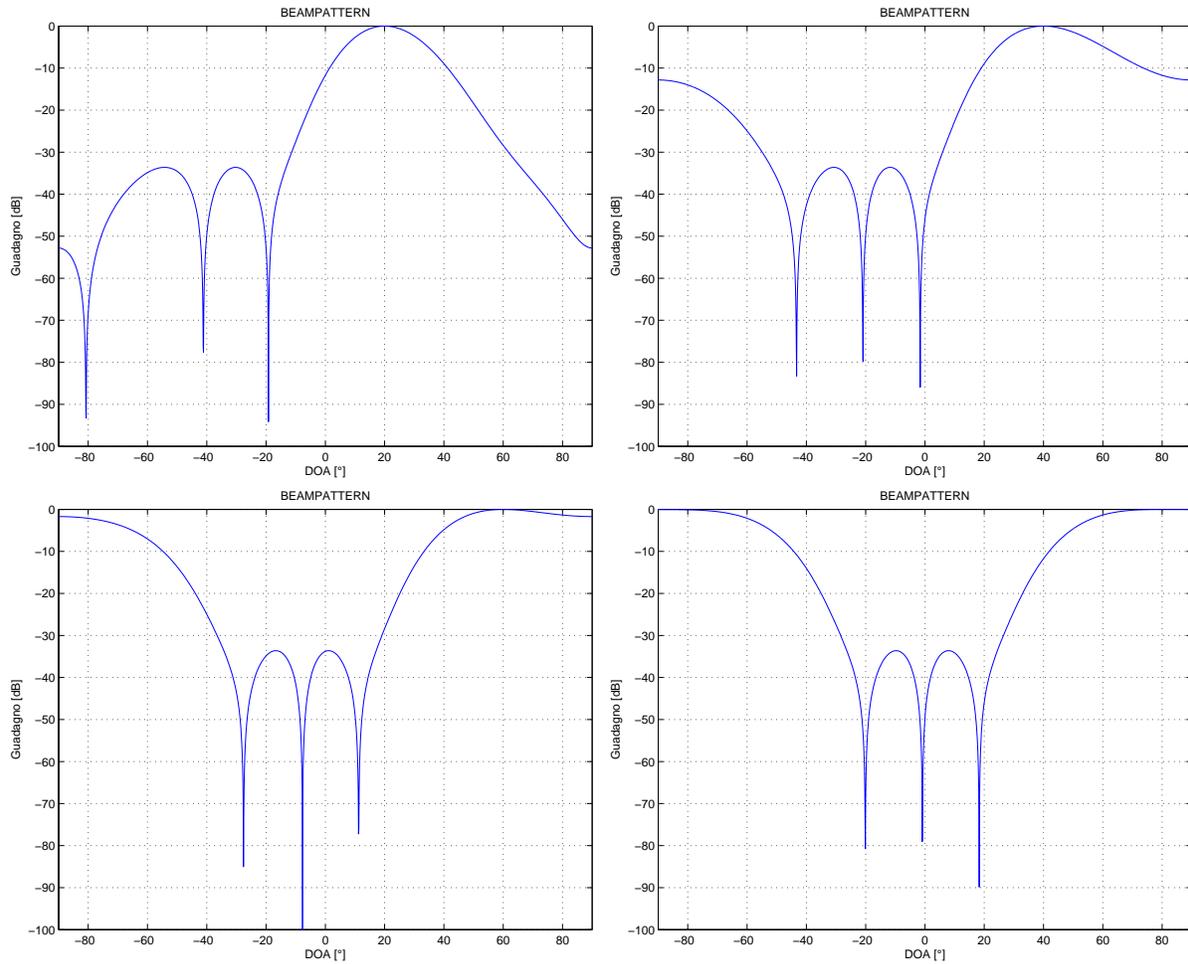


Figura 3.12: Effetto combinato del finestramento dei coefficienti e del puntamento $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ sul beampattern ($N = 8$). Sensori ideali omnidirezionali, spazati di $\lambda/2$ e finestra di Hamming.

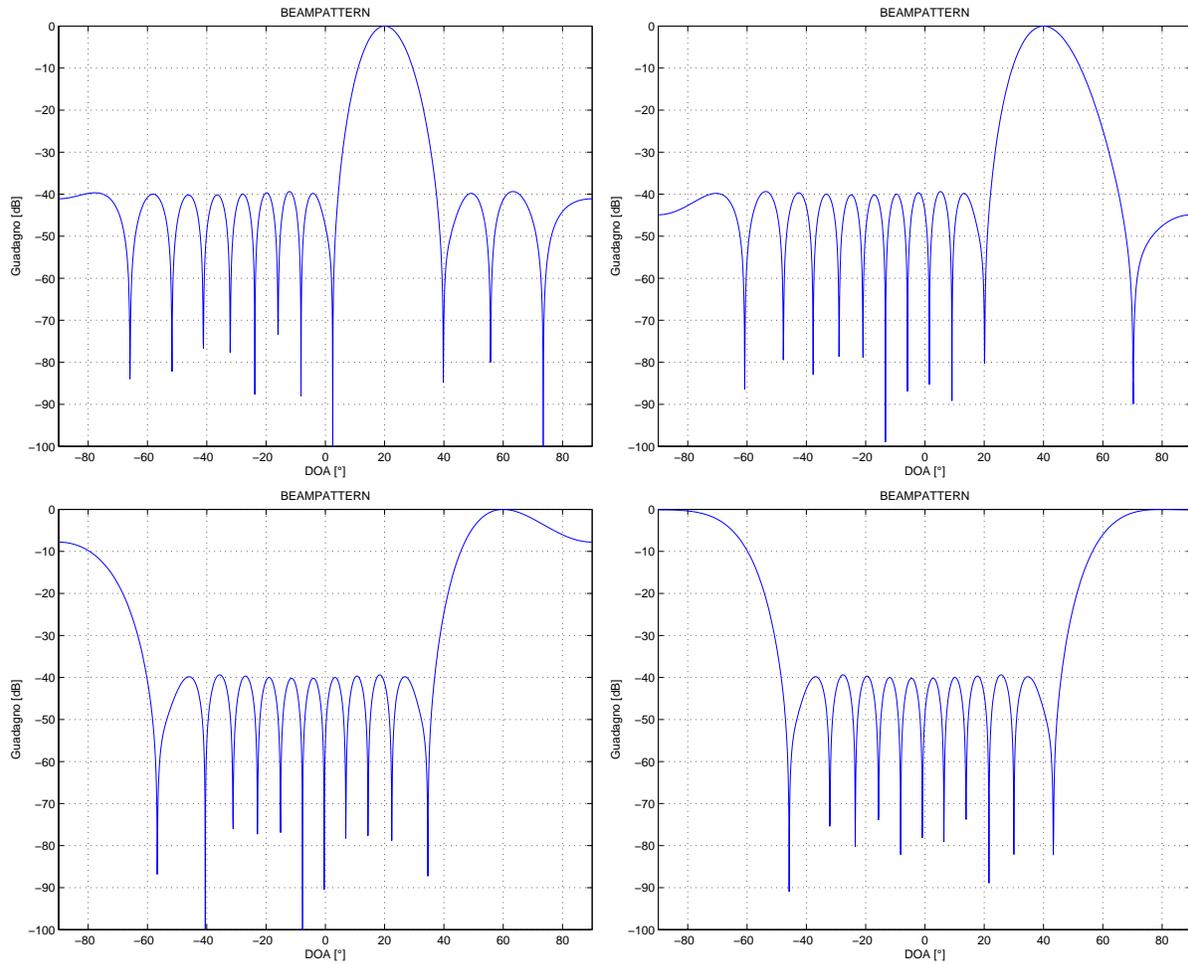


Figura 3.13: Effetto combinato del finestramento dei coefficienti e del puntamento $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ sul beampattern ($N = 16$). Sensori ideali omnidirezionali, spazati di $\lambda/2$ e finestra di Hamming.

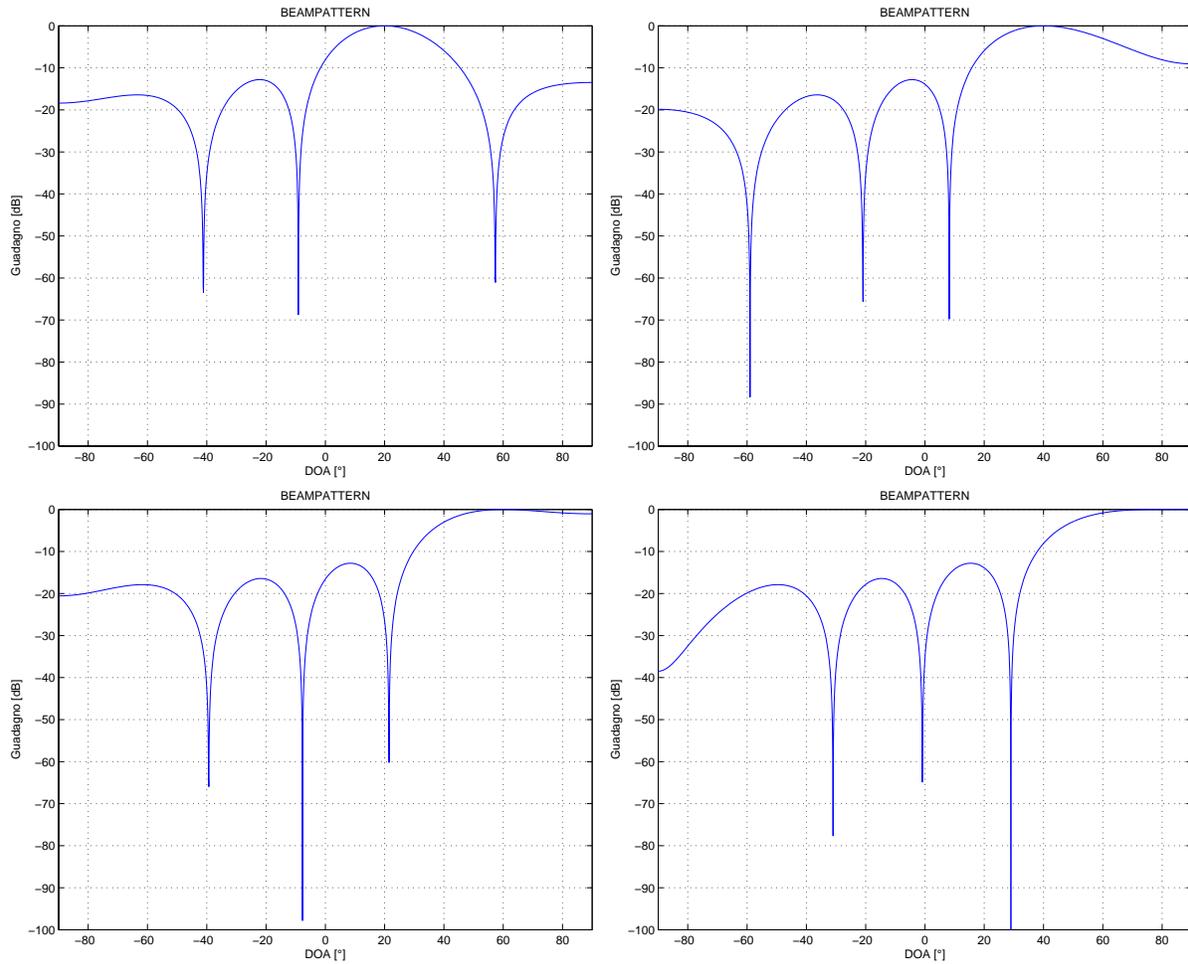


Figura 3.14: Effetti della spaziatura di $\lambda/4$ sul beampattern per $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Sensori ideali ($N = 8$) omnidirezionali.

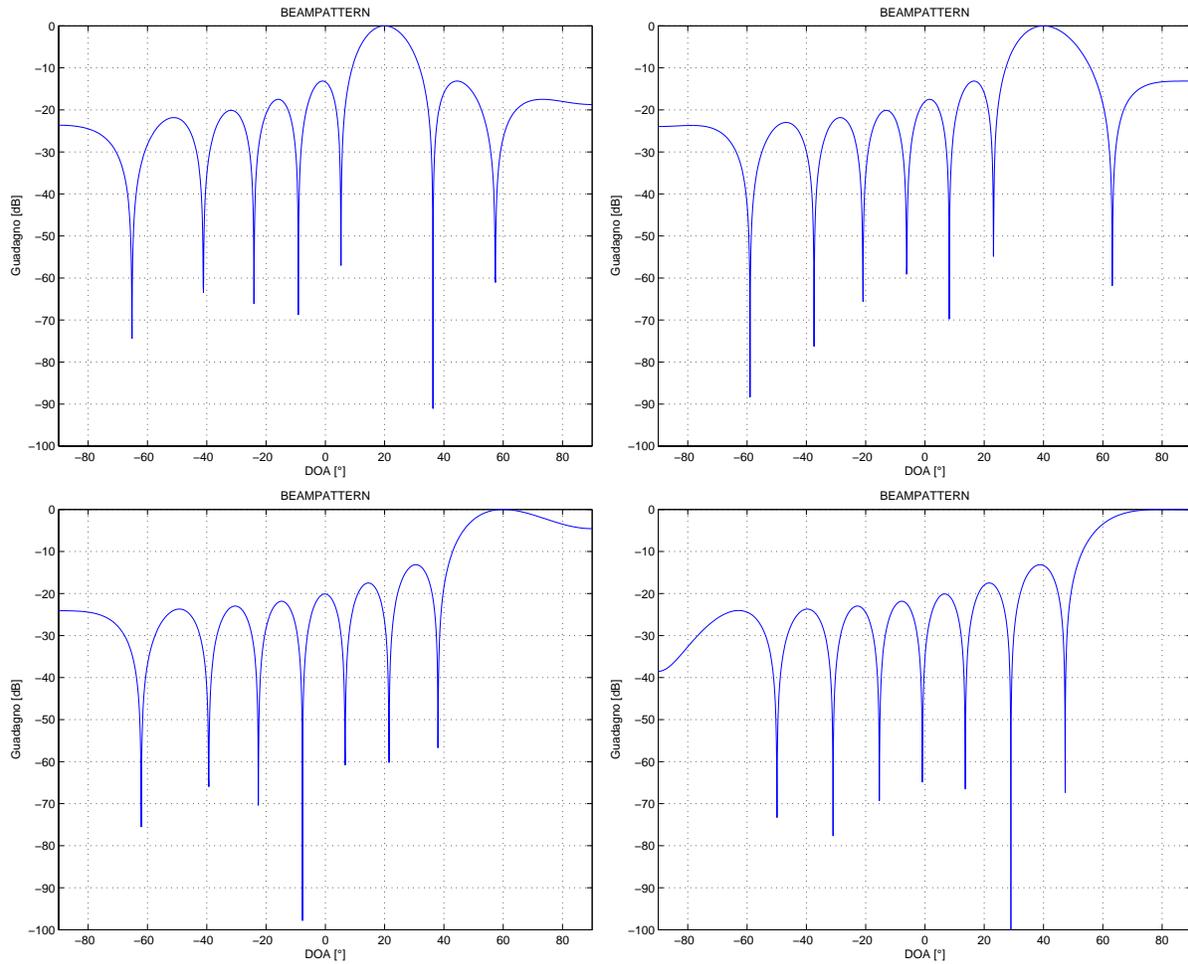


Figura 3.15: Effetti della spaziatura di $\lambda/4$ sul beampattern per $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Sensori ideali ($N = 16$) omnidirezionali.

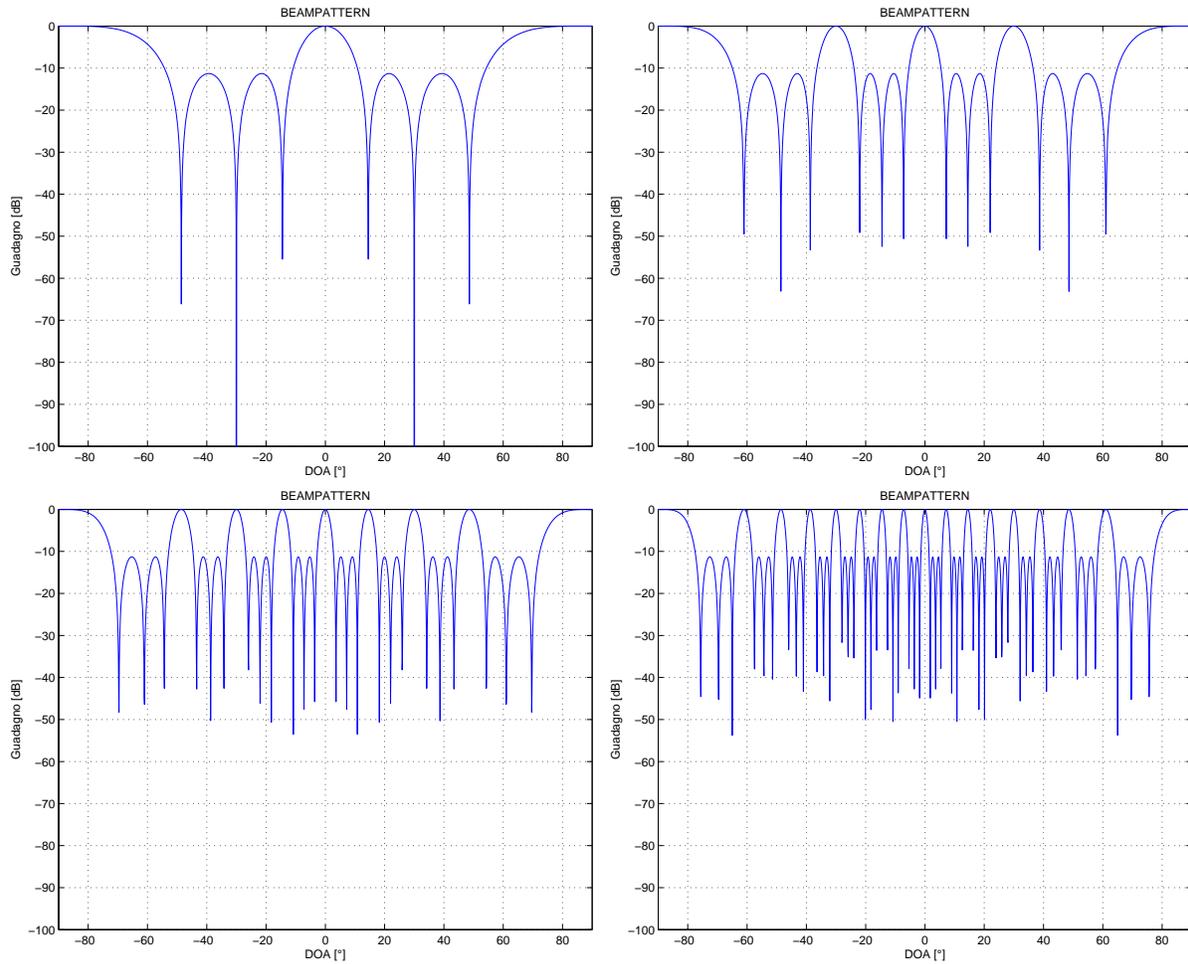


Figura 3.16: Effetti della spaziatura di $D = 1\lambda, 2\lambda, 4\lambda, 8\lambda$ sul beampattern. Sensori ideali ($N = 4$) omnidirezionali. L'ultimo caso risulta particolarmente interessante perchè costituisce il fattore di gruppo per BEST-1 in caso di puntamento a 0° .

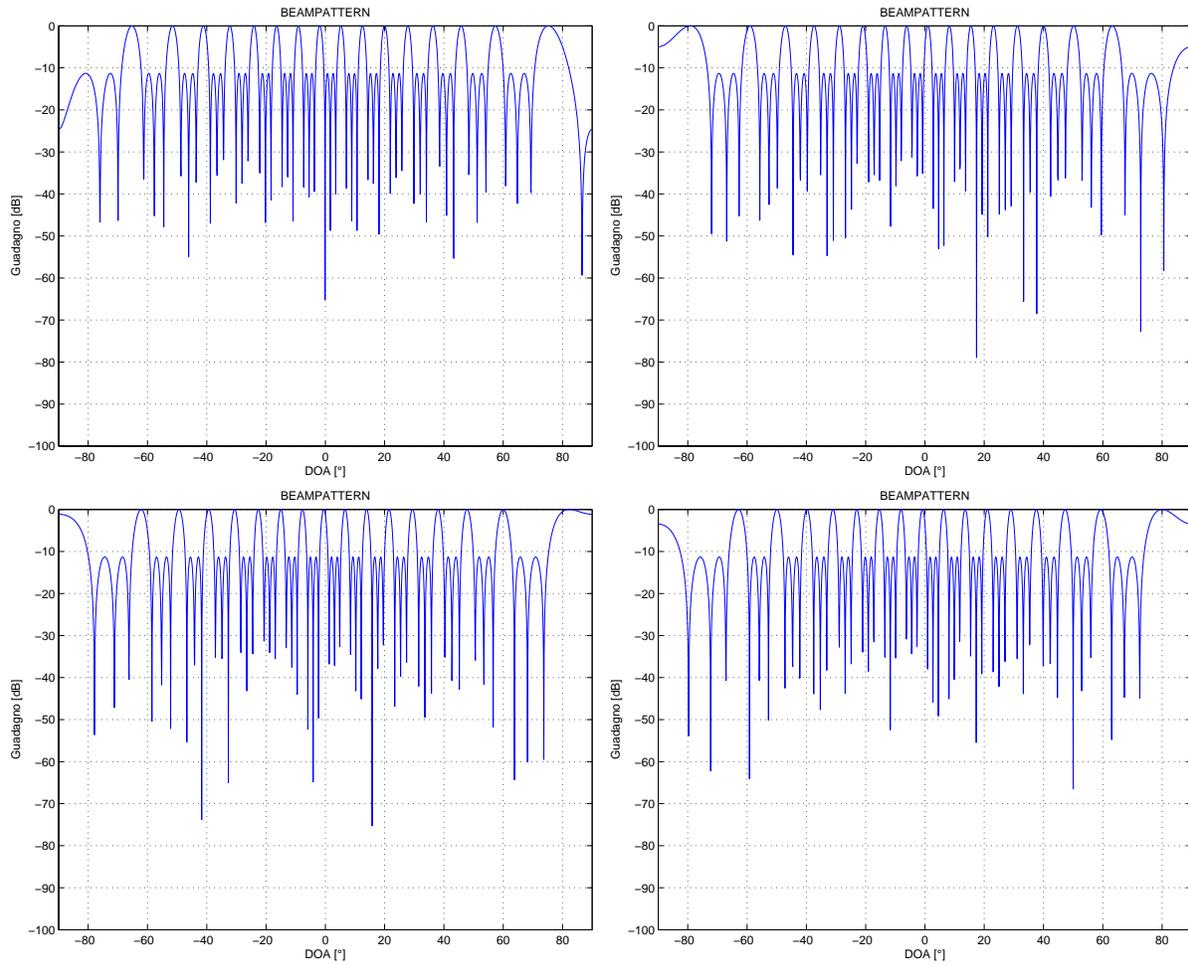


Figura 3.17: Effetti della spaziatura di 8λ sul beampattern per $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$. Sensori ideali ($N = 4$) omnidirezionali (fattore di gruppo di BEST-1).

3.4.2 Beampattern del singolo dipolo di BEST-1

Gli elementi che compongono i sensori di BEST-1 sono dei dipoli a mezz'onda. È facile dimostrare (vedi ad es. [2]) che la loro funzione di direttività vale:

$$f_{el}(\theta, \phi) = \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \sin \theta)}{\cos \theta} \right]^2 \quad (3.81)$$

In Fig. 3.18 viene riportato il diagramma polare della funzione di direttività del singolo elemento che compone un sensore di BEST-1⁸. In Fig. 3.19 viene riportato lo stesso beampattern in forma cartesiana, meno comune ma più consona all'analisi della direttività di BEST-1. I grafici sono stati normalizzati al guadagno massimo.

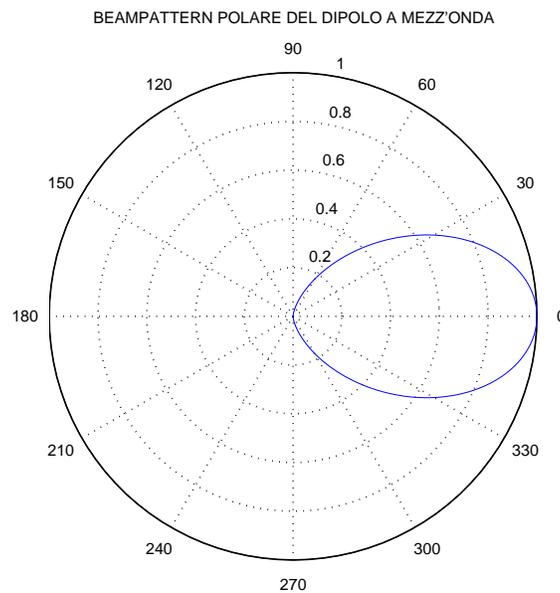


Figura 3.18: Beampattern polare del singolo dipolo che compone un sensore di BEST-1.

3.4.3 Beampattern del singolo sensore di BEST-1

Noto il beampattern del singolo dipolo, è possibile ricavare il beampattern del singolo sensore mediante l'equazione 3.75 (vedi Fig. 3.20). Come si può vedere, in virtù della 3.76, non differisce in modo significativo dal terzo grafico riportato in Fig. 3.8, segno della validità di tale equazione.

Il lobo principale ha un'apertura a mezza potenza circa pari a:

⁸Viene riportato solo mezzo diagramma per via della presenza del piano riflettore. La presenza di quest'ultimo altera la funzione di direttività del dipolo stesso ma per quanto verrà detto nel paragrafo successivo ciò influisce poco sulla risposta complessiva del sistema.

$$HPBW \simeq \frac{1}{D_\lambda} = 0.125rad = 7.18^\circ \quad (3.82)$$

dove D_λ è l'apertura complessiva del sensore, espressa in lunghezze d'onda.

Il beampattern possiede $N - 1 = 15$ zeri⁹. È facile verificare (vedi ad es. [17]) che in generale questi si trovano in

$$\theta_k = \arcsin\left(\sin \theta_0 + k \frac{2}{N}\right) \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.83)$$

dove θ_0 è la direzione di osservazione.

In questo caso, essendo $\theta_0 = 0$ ed $N = 16$ si ha che gli zeri del sensore risultano essere posizionati in

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{k}{8}\right) = \pm 7.18^\circ, \pm 14.48^\circ, \pm 22.02^\circ, \pm 30^\circ, \pm 38.68^\circ, \pm 48.59^\circ, \pm 61.04^\circ, \pm 90^\circ \quad (3.84)$$

e dunque l'apertura BWFN risulta essere:

$$BWFN \simeq 14.36^\circ \quad (3.85)$$

⁹Per via dell'equivocazione spaziale gli zeri posti in $\pm 90^\circ$ coincidono.

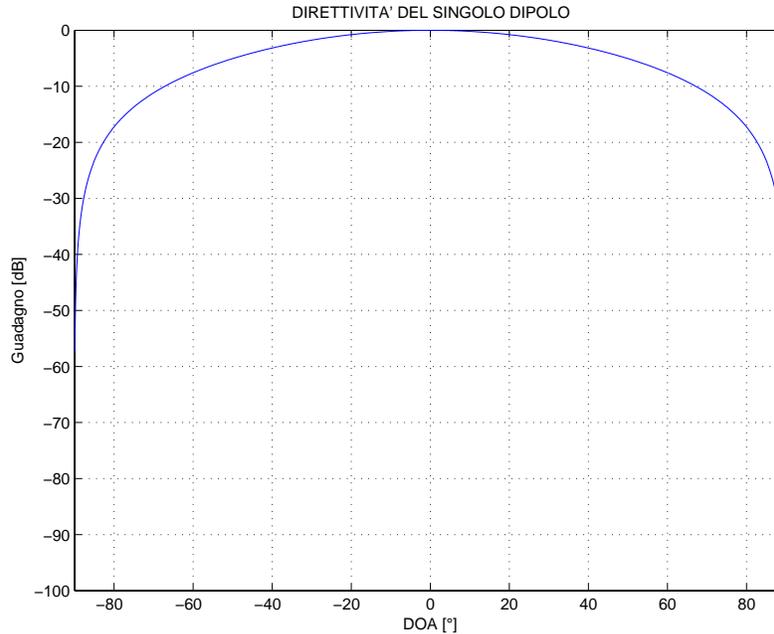


Figura 3.19: Beampattern cartesiano del singolo dipolo che compone un sensore di BEST-1.

3.4.4 Beampattern di BEST-1

Il ragionamento effettuato per calcolare il beampattern del sensore può essere ripetuto anche per calcolare il beampattern dell'array complessivo. Questa volta si considera come direttività dell'elemento quella del singolo sensore costituito da 16 dipoli, Fig. 3.20, mentre la direttività di gruppo dipende dai 4 coefficienti di beamforming. Nell'ipotesi che questi siano a fase nulla (puntamento 0°), la direttività di gruppo è quella riportata in Fig. 3.21 (nello stesso grafico, viene riportato in linea tratteggiata il beampattern del sensore). Sono presenti i lobi di grating dovuti alla spaziatura tra i sensori di 8λ . Nel caso di BEST-1 per $\theta_0 = 0^\circ$, i lobi di grating si trovano in:

$$\theta_k = \arcsin\left(\frac{k}{8}\right) = \pm 7.18^\circ, \pm 14.48^\circ, \pm 22.02^\circ, \pm 30^\circ, \pm 38.68^\circ, \pm 48.59^\circ, \pm 61.04^\circ, \pm 90^\circ \quad (3.86)$$

cioè coincidono con la spaziatura tra gli zeri del sensore (equazione 3.84) ed il beampattern complessivo è quello riportato in Fig. 3.22. Purtroppo la cancellazione dei lobi di grating non avviene sempre, ma si ha solo quando la direzione di osservazione di gruppo coincide con la direzione di osservazione del sensore (cioè quando le equazioni 3.83 e 3.77 coincidono). Siccome i sensori hanno un puntamento fisso di 0° , questo avviene solo per angoli di osservazione di 0° . Per altri valori dei coefficienti, cioè per altri angoli di puntamento, in genere questo non si verifica (Fig. 3.23).

Il beam di BEST-1 avrà un'apertura che risulterà essere circa 1/4 di quella del singolo sensore:

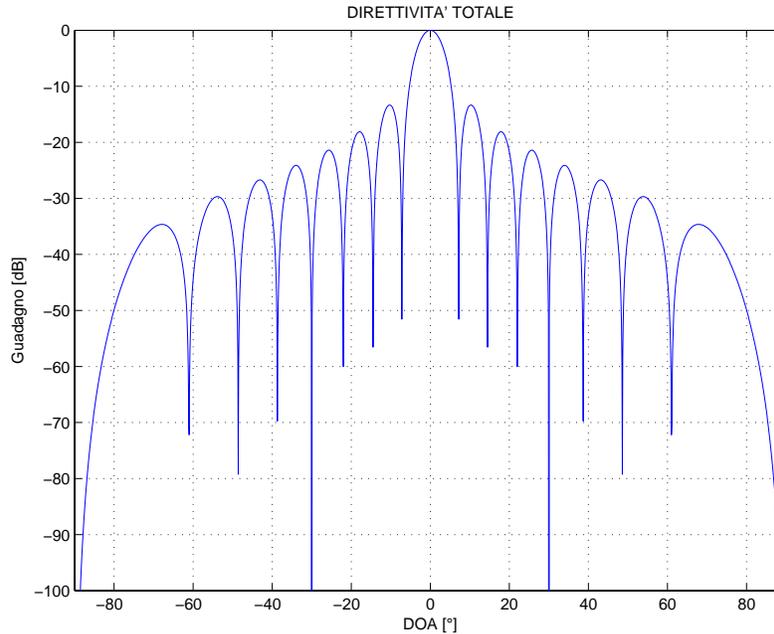


Figura 3.20: Beampattern del singolo sensore di BEST-1.

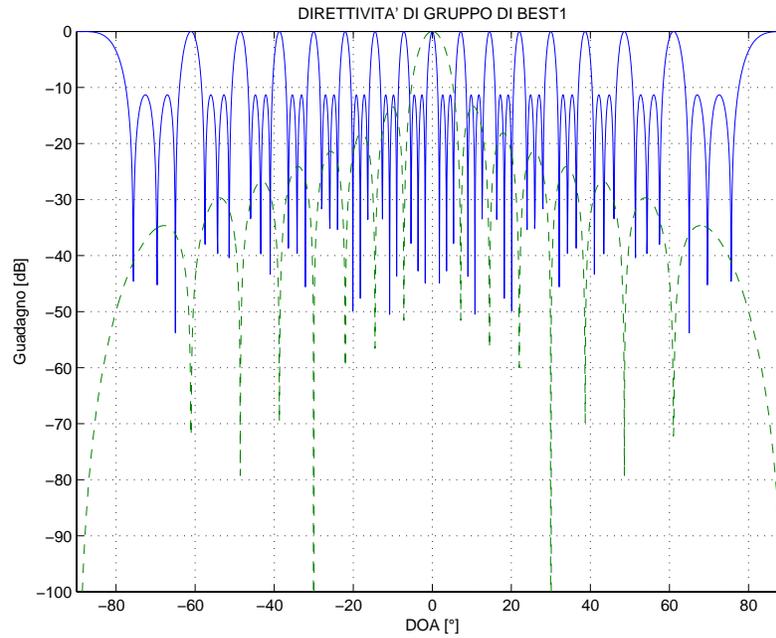


Figura 3.21: Beampattern di gruppo per BEST-1 nel caso di coefficienti a fase nulla (puntamento 0°). In linea tratteggiata viene riportato il beampattern del sensore e si osservi come, per questo particolare caso di puntamento, gli zeri della funzione coincidono con i lobi di grating.

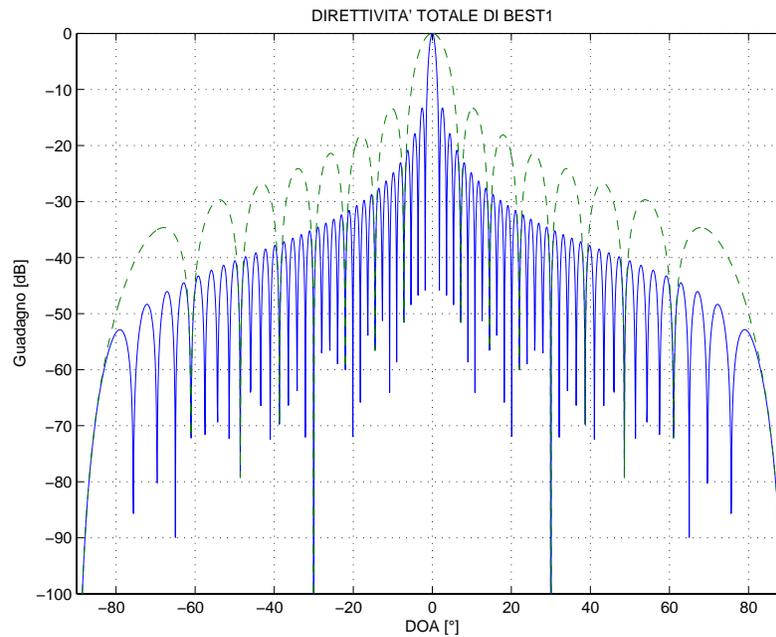


Figura 3.22: Beampattern complessivo per BEST-1 nel caso di coefficienti a fase nulla (puntamento 0°). In linea tratteggiata viene riportato il beampattern del sensore.

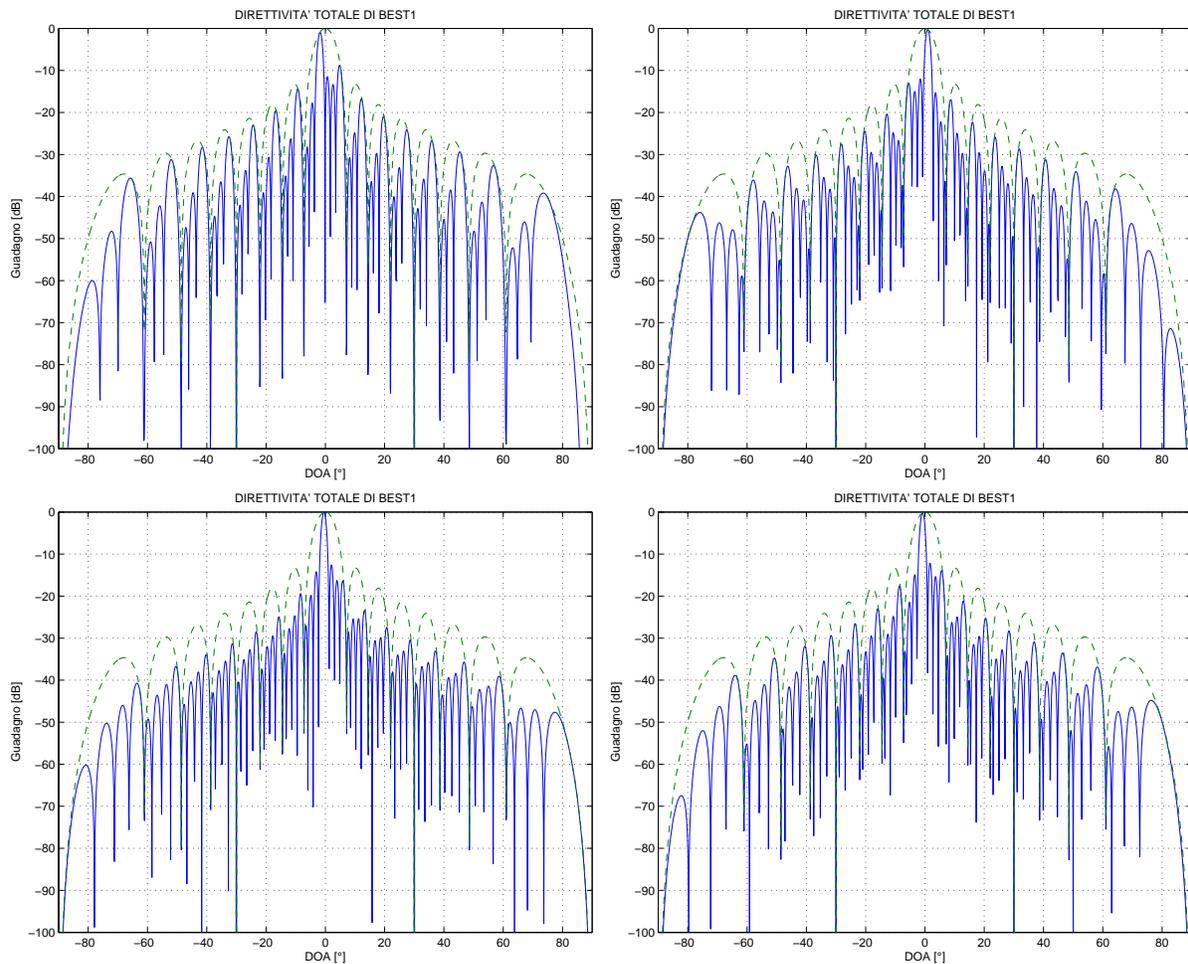


Figura 3.23: In BEST-1 la cancellazione dei lobi di grating dovuti ad una spaziatura di 8λ tra i sensori non avviene sempre. Avviene solo quando i sensori ed il gruppo guardano nella stessa direzione di osservazione, caso in cui i lobi di grating coincidono con gli zeri del sensore. In questa figura è possibile osservare invece cosa succede per coefficienti di gruppo calcolati su $DOA = 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$.

$$HPBW_{BEST1} \simeq \frac{1}{ND_\lambda} \simeq 1.79^\circ \quad (3.87)$$

dove N è il numero di sensori, D_λ l'apertura del sensore espressa in λ e dunque ND_λ è l'apertura complessiva dell'array.

Si osservi tuttavia che l'apertura del beam, come la distanza tra i primi due zeri, varia con l'angolo di puntamento, in modo conforme alla (3.83).

3.4.5 Beamforming classico con BEST-1

Come illustrato nel paragrafo 3.2.1, il modo più semplice per implementare il beamforming consiste nell'utilizzare come vettore dei coefficienti \mathbf{w} lo steering vector $\mathbf{d}(\theta)$ associato alla direzione di osservazione desiderata θ_0 massimizzato rispetto al numero di sensori:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{N} \mathbf{d}(\theta_0) \quad (3.88)$$

con

$$\mathbf{d}(\theta_0) = [1 \ e^{j2\pi d_\lambda \sin \theta_0} \ \dots \ e^{j2\pi d_\lambda (N-1) \sin \theta_0}] \quad (3.89)$$

dove d_λ distanza tra i sensori espressa in λ .

Tuttavia, per via dell'equivocazione spaziale il beam potrà essere direzionato solo all'interno del FOV¹⁰ del singolo sensore (equazione 3.82):

$$|\theta_0| \leq 3.59^\circ \quad (3.90)$$

Per angoli maggiori si otterrà un puntamento errato ed il beam risulterà equivocato (Fig. 3.24).

Dunque nel caso di BEST-1, il puntamento mediante beamforming classico si ottiene semplicemente ponendo:

$$\mathbf{w} \equiv \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{j2\pi 8 \cdot 0 \sin \theta_0} \\ e^{j2\pi 8 \cdot 1 \sin \theta_0} \\ e^{j2\pi 8 \cdot 2 \sin \theta_0} \\ e^{j2\pi 8 \cdot 3 \sin \theta_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j16\pi \cdot 1 \sin \theta_0} \\ e^{j16\pi \cdot 2 \sin \theta_0} \\ e^{j16\pi \cdot 3 \sin \theta_0} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

con θ_0 direzione angolare della radiosorgente da osservare.

¹⁰Field Of View. Angolo di vista di un'antenna.

Si osservi, che *il beam non risulta perfettamente orientato in θ_0* (vedi Fig. 3.25). Questo leggero fenomeno di disallineamento si deve alla non idealità dei sensori del beampattern. Infatti se i sensori fossero veramente *omnidirezionali* la loro funzione di direttività sarebbe unitaria sull'intero angolo θ . In realtà, nella moltiplicazione tra il fattore di gruppo e funzione di direttività del sensore, *viene allineato in direzione di θ_0 il punto di tangenza tra il beam del sensore ed il beam complessivo e non il beam stesso*. Questo disallineamento si traduce in una leggera perdita di direttività del beamformer che si traduce in perdite di sensibilità del radiotelescopio. Tale perdita non pregiudica le prestazioni complessive del sistema. Volendo raffinare il sistema di puntamento è possibile sviluppare una procedura di compensazione di θ_0 (*prepuntamento*), prima del calcolo dei coefficienti del beamformer.

3.4.6 Null steering con BEST-1

Nel caso di BEST-1 sono ancora valide le considerazioni effettuate nel paragrafo 3.3.1, purchè si tenga conto degli effetti dovuti all'*equivocazione spaziale*. Per il controllo del beam, come per il beamforming classico, si deve ottenere:

$$|\theta_0| \leq 3.59^\circ \quad (3.92)$$

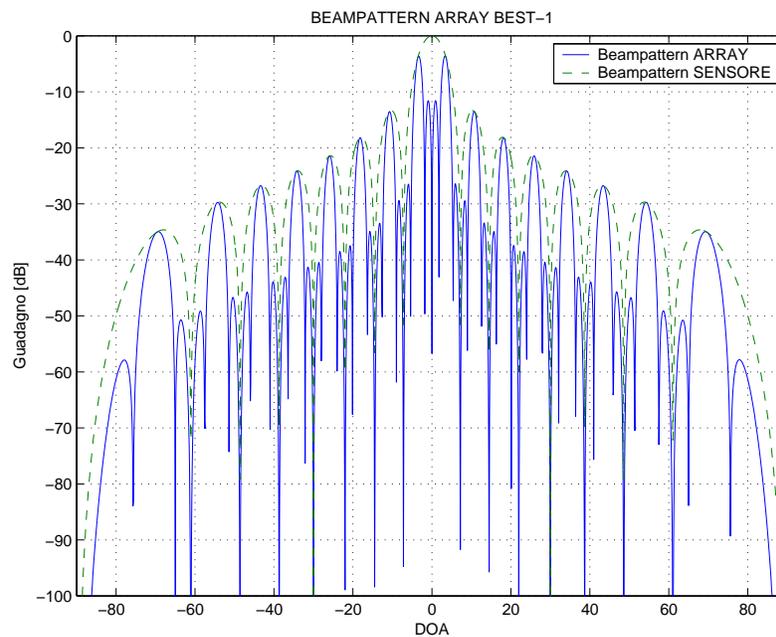


Figura 3.24: Beampattern di BEST-1 per il massimo angolo di puntamento $\theta_0 = 3.58$. Si può osservare il beam equivocato a causa dei lobi di grating.

Pe valori maggiori il beam verrà equivocato da un lobo di grating e ciò porterà ad un puntamento errato.

Per quanto concerne gli zeri (che al massimo potranno essere $N - 2 = 2$), possono essere applicati ovunque purchè le loro repliche equivocate risultino esterne al BWFN del lobo principale (circa 1.79° per un puntamento $\theta_0 = 0^\circ$). Diversamente si otterrà una distorsione del beam ed ancora una volta l'effetto complessivo sarà un puntamento errato del beam stesso.

In Fig. 3.26 viene riportato un esempio di null steering ottenuto con BEST-1. Si ha un puntamento $\theta_0 = 0^\circ$ ed uno zero viene posto in direzione di una RFI proveniente da $\theta_1 = 3^\circ$: lo zero è posto all'interno del beam del sensore ma fuori dal beam dell'array, per cui non vi sono particolari problemi. In Fig. 3.27 invece si ha $\theta_0 = 2^\circ$ e $\theta_1 = -1^\circ$: anche per puntamenti differenti da 0° si hanno risultati validi. Nell'esempio di Fig. 3.28 si ha $\theta_0 = 2^\circ$ e $\theta_1 = 27^\circ$: lo zero è posto *fuori* dal beam del sensore. Il beampattern complessivo presenterà sì uno zero in 27° ma per via dell'equivocazione verrà riportato anche all'interno del beam del sensore. Tuttavia la replica (che si trova a circa 4.5°) in questo caso non cade nel beam dell'array e pertanto anche in questo caso la soluzione è accettabile. Nell'ultimo esempio di Fig. 3.29 si ha ancora $\theta_0 = 2^\circ$ ma $\theta_1 = 41^\circ$: il beampattern complessivo presenta lo zero in 41° ma questa volta la replica dello stesso all'interno del beam del sensore cade nel main beam dell'array causandone una forte deformazione e la soluzione chiaramente non risulta essere accettabile.

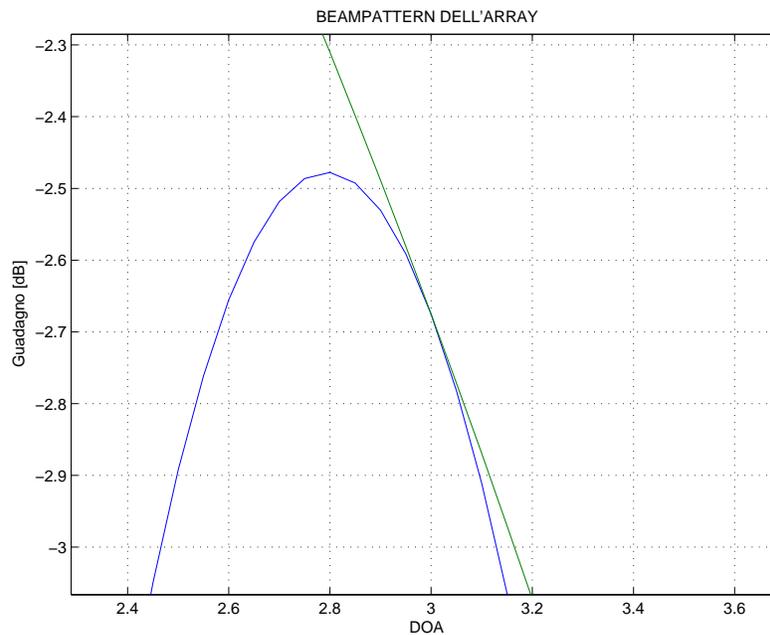


Figura 3.25: Per via della non idealità dei sensori il beam risulta leggermente disallineato di circa $12'$ per $\theta_0 = 3^\circ$ e si ha una leggera diminuzione della sensibilità (circa $0.2dB$).

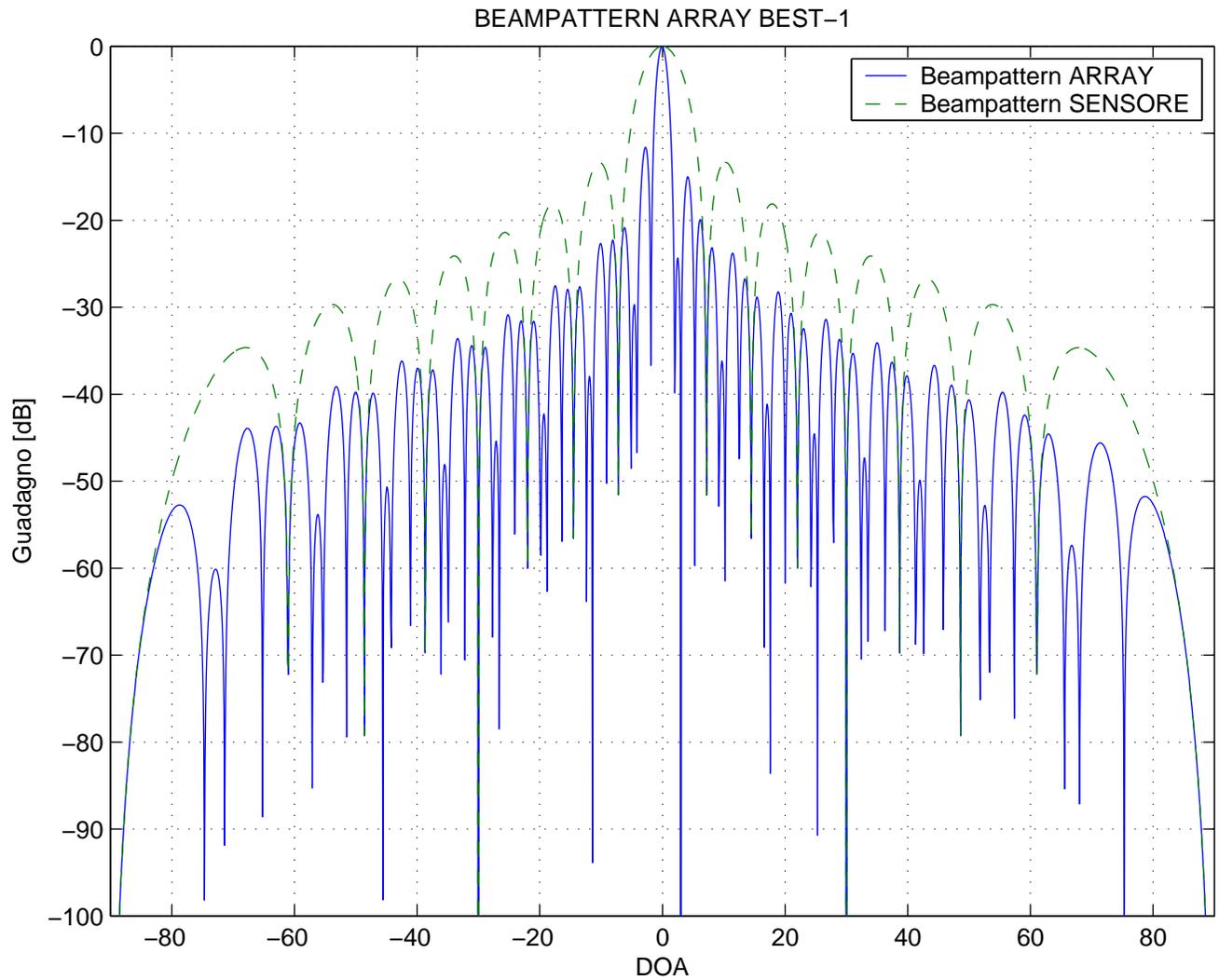


Figura 3.26: Esempio di null steering ottenuto con BEST-1. Si ha un puntamento $\theta_0 = 0^\circ$ ed uno zero viene posto in direzione di una RFI proveniente da $\theta_1 = 3^\circ$: lo zero è posto all'interno del beam del sensore ma fuori dal beam dell'array, perciò non vi sono particolari problemi di puntamento.

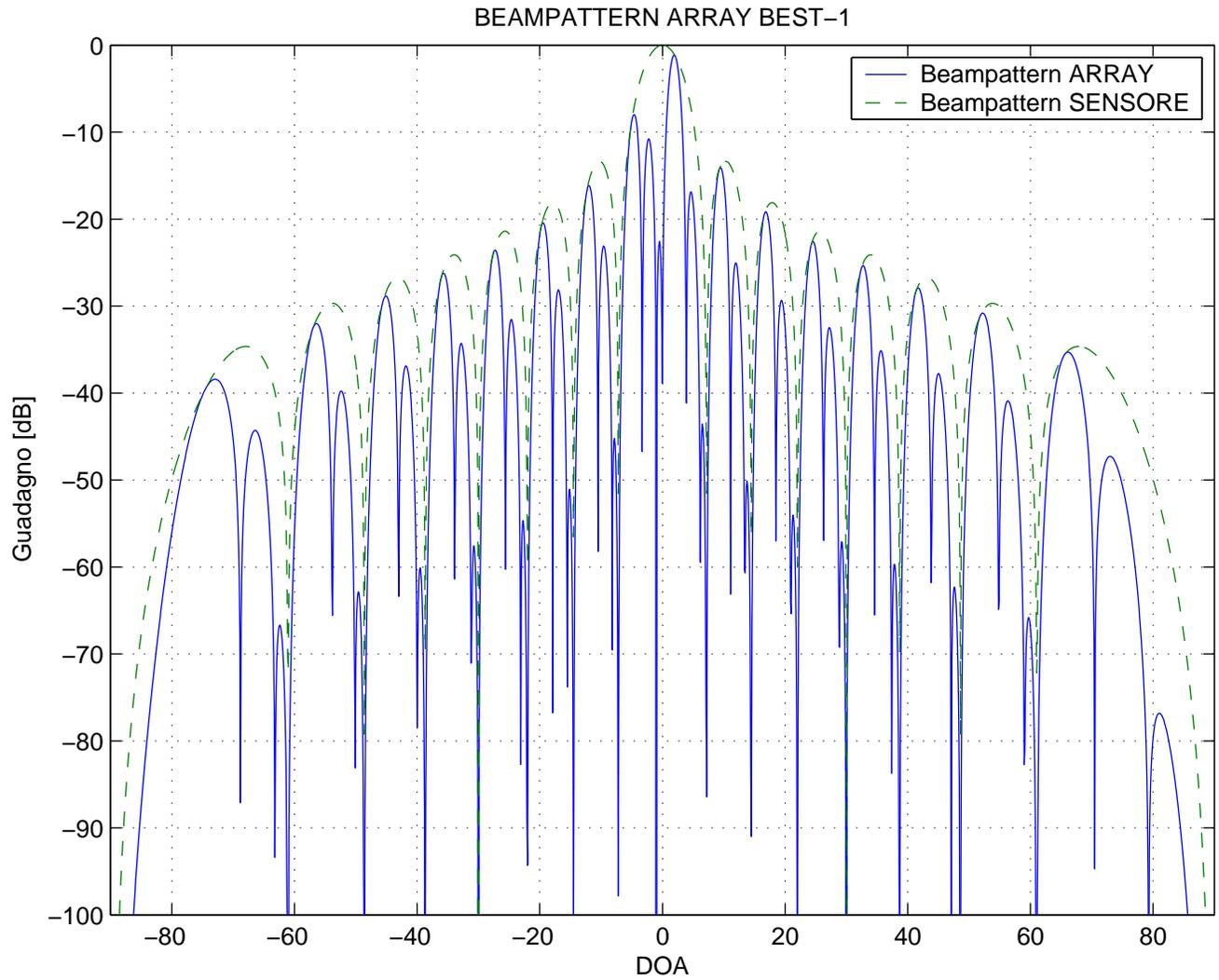


Figura 3.27: In questo caso invece si ha $\theta_0 = 2^\circ$ e $\theta_1 = -1^\circ$. Come si può vedere anche per puntamenti differenti da 0° si hanno risultati validi.

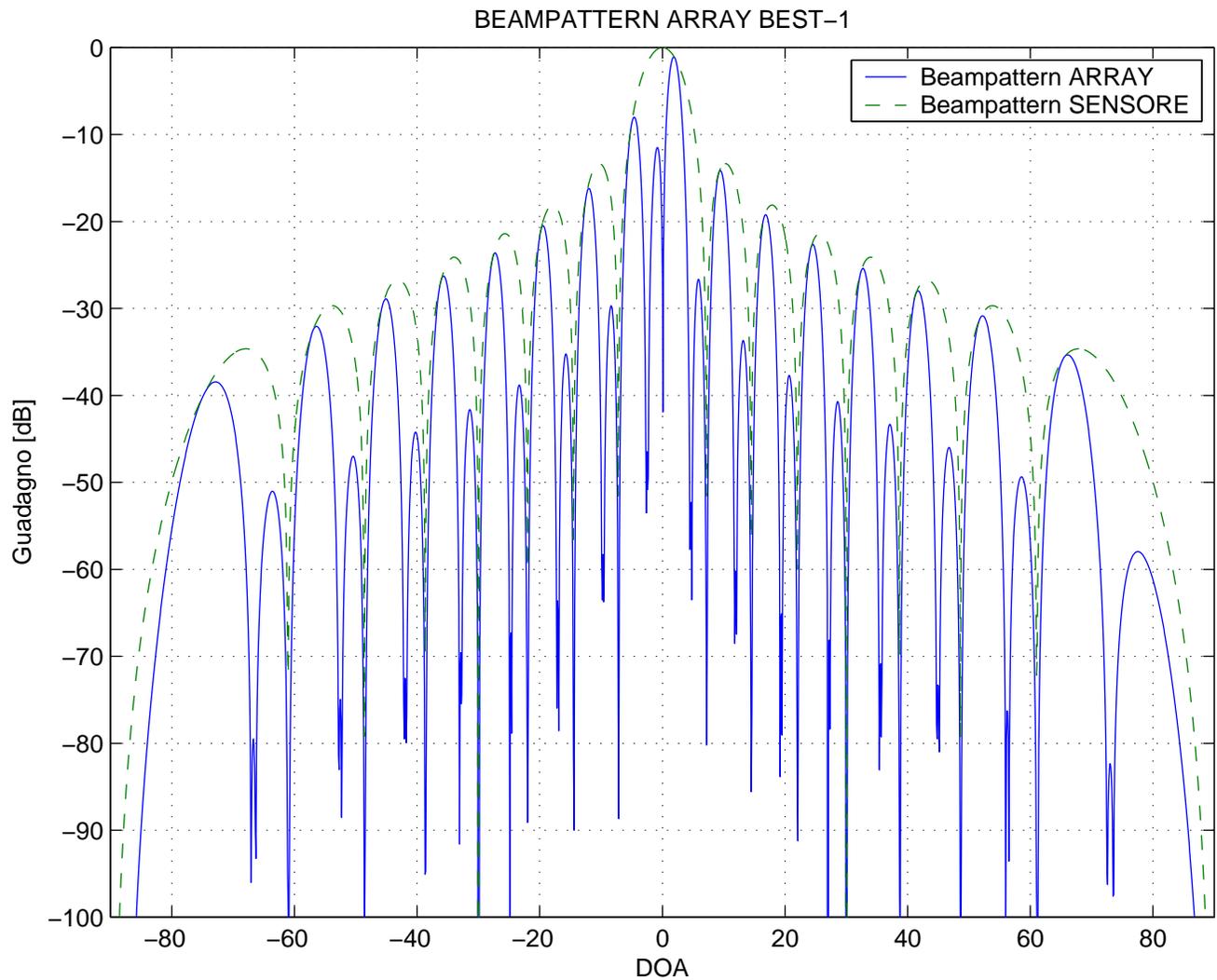


Figura 3.28: Si ha $\theta_0 = 2^\circ$ e $\theta_1 = 27^\circ$: lo zero è posto *fuori* dal beam del sensore. Il beampattern complessivo presenterà sì uno zero in 27° ma per via dell'equivocazione verrà riportato anche all'interno del beam del sensore. Tuttavia la replica (che si trova a circa 4.5°) in questo caso non cade nel beam dell'array e pertanto anche in questo caso la soluzione è accettabile.

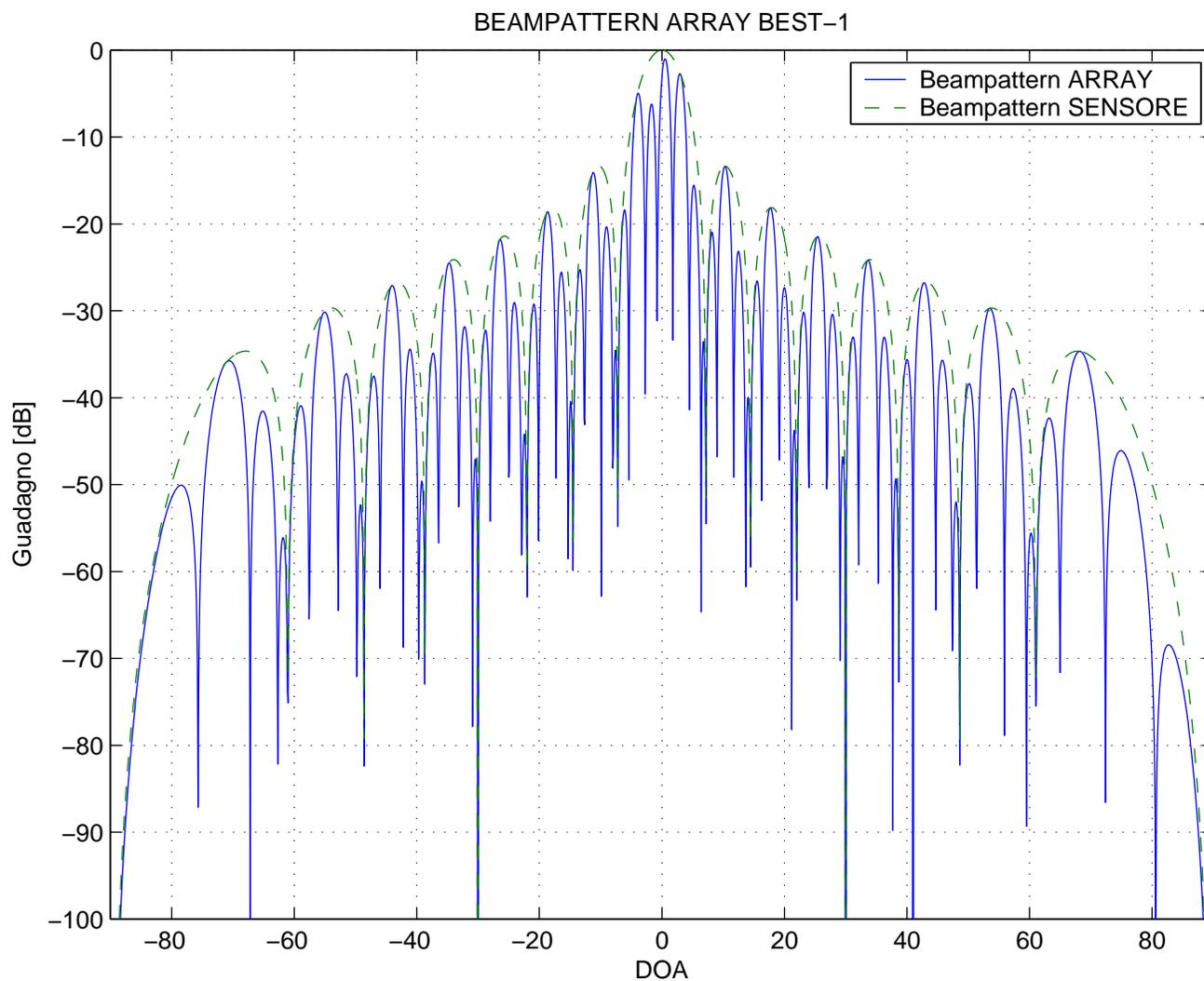


Figura 3.29: In quest'ultimo esempio si ha ancora $\theta_0 = 2^\circ$ ma $\theta_1 = 41^\circ$: il beampattern complessivo presenta lo zero a 41° ma la replica dello stesso all'interno del beam del sensore cade nel main beam dell'array causandone una forte deformazione e la soluzione chiaramente risulta non essere accettabile.

Capitolo 4

Beamforming adattativo

4.1 Algoritmi di beamforming adattativo

Nell'ambito delle telecomunicazioni tradizionali sono stati sviluppati diversi algoritmi per il beamforming adattativo ma la loro efficacia in campo radioastronomico non è stata ancora del tutto chiarita. Un caso emblematico viene offerto dai satelliti LEO¹ per telecomunicazioni (ad esempio GLONASS ed IRIDIUM) i quali talvolta operano su bande di frequenze particolarmente interessanti per le osservazioni radioastronomiche. In questo caso, le interferenze satellitari possono essere più problematiche di quelle terrestri perchè non hanno una direzione di provenienza fissa e possono in breve tempo attraversare sia il main beam del radiotelescopio, sia i suoi lobi laterali. Tali interferenze, in combinazione con quelle terrestri, contribuiscono alla creazione di uno scenario *non stazionario*, che pertanto richiede un approccio *adattativo* per un'efficace mitigazione.

A differenza delle telecomunicazioni tradizionali, la radioastronomia soffre di

1. *SNR estremamente bassi*, anzi quasi sempre il segnale utile risulta essere immerso (*buried*) nel rumore di sistema e per essere rilevato necessita di lunghi periodi di integrazione (anche dell'ordine di diverse ore).
2. *lobi di grating* dovuti all'eccessiva spaziatura (maggiore di $\lambda/2$) tra gli elementi che compongono l'array.
3. *elevata direttività dei sensori* che compongono l'array, mentre la teoria del beamforming ne richiede una certa omnidirezionalità.
4. *interferenze significative* raccolte anche dai lobi secondari dell'antenna.
5. necessità di conoscere il *guadagno assoluto* del sistema ricevente (*calibrazione*) al fine di certi-

¹Low Earth Orbit. Satelliti artificiali caratterizzati da una quota orbitale media relativamente bassa e dunque da un'elevata velocità angolare.

ficare le misurazioni effettuate (e.g. temperatura di brillantezza di una radiosorgente o estensione angolare della stessa).

Diverse comunità scientifiche ([6], [18], [21], [25]) hanno condotto degli studi in merito, per capire quali algoritmi potessero essere più consoni ad un uso in campo radioastronomico. I criteri di selezione sono stati la capacità di reiettare/mitigare le RFI ed il livello medio di distorsione introdotto sul beam.

I principali algoritmi presi in considerazione sono stati²:

1. MVDR (Minimum Variance Distorsionless Response)
2. GSC (Generalized Sidelobe Canceller)
3. MSC (Multiple Sidelobe Canceller)
4. Max SNR (Max Signal to Noise Ratio)

Gli algoritmi MVDR e GSC pongono dei vincoli sulla risposta spaziale del beamformer in modo tale che i segnali provenienti dalle direzioni di interesse vengano lasciati passare con determinati guadagni (e fasi, eventualmente). Gli zeri del beampattern si formano *dinamicamente* in corrispondenza dei segnali interferenti che provengono da direzioni diverse da quelle specificate nei vincoli. In particolare, l'approccio del GSC consiste nel trasformare il problema di calcolo di minimo vincolato del MVDR in un problema di calcolo di minimo assoluto. In tal caso, con un array da N elementi possono essere cancellati fino ad $N - 1$ interferenti e non viene richiesto l'inseguimento meccanico (*tracking*) della radiosorgente interferente. L'MSC invece usa un'antenna singola ad alto guadagno per osservare la radiosorgente astronomica ed uno o più canali ausiliari caratterizzati da un alto rapporto interferenza/segnale. Tale metodo richiede che le antenne ausiliarie vengano orientate in direzione delle RFI e ciò costituisce il principale limite di applicabilità di questo metodo, in particolare quando le DOA delle RFI non sono note a priori, sono di difficile stima o, come nel caso dei satelliti LEO, risultano essere variabili. Per tali ragioni, sebbene la tecnica MSC sia in grado di notevoli prestazioni (vedi Cap. 5), viene generalmente preferita una tecnica *blind* come appunto il MVDR. In ultimo si distingue il metodo Max SNR, che però richiede la stima delle matrici di covarianza del rumore (correlato e non) $\mathbf{R}_{i+n} = \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_n$ e del segnale radioastronomico \mathbf{R}_s . Tale stima potrebbe risultare particolarmente ardua o richiedere delle ipotesi a priori non sempre corrette riguardo la natura dei segnali in gioco.

Gli algoritmi sopracitati sono stati sottoposti a diverse simulazioni statistiche ([18]) nelle quali i dati riproducevano l'osservazione di una debole radiosorgente che emetteva sulla riga dell'OH e veniva disturbata dal passaggio di un satellite GLONASS. È stata usata una grande varietà di geometrie e di livelli di emissione per le sorgenti di RFI per determinare quali algoritmi avessero le migliori

²Il funzionamento e le peculiarità di tali algoritmi sono stati ampiamente discussi nel Cap. 2, pertanto in questo capitolo non verranno ripresi ulteriormente. Ci si limita esclusivamente ad un loro breve richiamo.

prestazioni in ogni situazione. La matrice di covarianza e gli altri parametri statistici richiesti dagli algoritmi sono stati tutti stimati dai dati osservati.

In sintesi, i risultati ottenuti in merito alle varie problematiche in gioco, sono i seguenti:

- *Attenuazione delle RFI in prossimità dei lobi di grating.* In tale condizione, porre uno zero in direzione dell'interferenza causa anche un'inevitabile soppressione del segnale desiderato. Per affrontare tale tipologia di problema l'algoritmo MSC (Cap. 5) è risultato essere l'algoritmo migliore, in quanto è quello che si lascia influenzare meno dai lobi di grating, mentre gli algoritmi MVDR, GSC e Max SNR hanno riportano tutti praticamente le stesse prestazioni. Questi ultimi tre algoritmi consentono un miglioramento anche fino a $100dB$ del SINR all'uscita del beamformer ma, come si può ben capire, non sono in grado di apportare alcun miglioramento quando la direzione di provenienza dell'RFI cade proprio in corrispondenza di un lobo di grating.
- *Sensibilità agli errori di calibrazione.* Gli errori di calibrazione (sia di fase, sia di guadagno) sono inevitabili mentre algoritmi come il MVDR ed il GSC richiedono accurate condizioni di calibrazione per funzionare correttamente. Le ricerche hanno mostrato che sebbene gli errori di calibrazione possano compromettere il livello di attenuazione delle interferenze, il miglioramento complessivo del SINR risulta comunque notevole.
- *Distorsione del lobo principale.* Un punto essenziale per la radioastronomia è la consistenza di forma del beam, al fine di evitare polarizzazioni nelle misure. Con il MVDR, il GSC ed il Max SNR, la forma del lobo principale può essere notevolmente distorta se l'interferenza entra dal beam stesso o da un lobo di grating. Questo succede perchè l'algoritmo tenta di porre uno zero sull'interferente, ignorando il beampattern finale che se ne ottiene, affinché comunque il SINR in uscita raggiunga il suo massimo.

L'algoritmo MSC sembra essere quello in grado di fornire le prestazioni migliori in termini di reiezione alle RFI. Tuttavia, per via della sua necessità di possedere un sistema di osservazione ausiliario costantemente puntato in direzione della sorgente (o peggio ancora *delle sorgenti*) di RFI, ed eventualmente di un sistema di *tracking* nel caso di sorgenti mobili, non risulta essere la soluzione più conveniente. Il miglior compromesso in termini di costo/prestazione viene dunque fornito dal MVDR che tuttavia richiede un'accurata calibrazione del complesso ricevente.

Un buon algoritmo adattativo deve avere le seguenti proprietà:

1. Guadagno costante nella direzione di osservazione θ_0
2. Zeri orientati in direzione di tutti gli altri segnali interferenti $\theta_1, \theta_2, \dots$

Il MVDR non ha la capacità di reiettare le interferenze che hanno altri metodi come l'MSC ma in compenso è semplice e diretto da implementare e soddisfa i due requisiti espressi sopra.

Sono stati compiuti notevoli sforzi per cercare di risolvere il problema dell'accuratezza della calibrazione. In [19] ed in [20] vengono descritte delle versioni *robuste* di MVDR che cercano di smorzare gli effetti dovuti agli errori di puntamento ed alle perturbazioni casuali sui parametri dei sensori.

4.2 Algoritmo MVDR adattativo

In questo paragrafo viene illustrata passo-passo la procedura necessaria all'implementazione dell'algoritmo MVDR in regime adattativo, ricorrendo anche a delle simulazioni MATLAB per meglio illustrare i concetti descritti.

4.2.1 Implementazione del MVDR adattativo

I passi da seguire per l'implementazione del MVDR sono i seguenti:

1. Viene definita la direzione di osservazione θ_0 (*look direction*) e si recupera lo *steering vector* $\mathbf{d}(\theta_0)$ ad essa associato. Nel paragrafo 4.2.3 verrà spiegato in maggiore dettaglio cosa si intenda per *recupero*. Per il momento si supponga che l'array sia composto da sensori *ideali* e che dunque gli steering vectors *effettivi* coincidano con quelli *ideali*. In tal caso si ha:

$$\mathbf{d}(\theta_0) = [1 \ e^{j2\pi\frac{d}{\lambda}\sin\theta_0} \ \dots \ e^{j2\pi(N-1)\frac{d}{\lambda}\sin\theta_0}] \quad (4.1)$$

Il significato di tale espressione è già stato ampiamente discusso nei capitoli precedenti.

2. I dati provenienti dall'array vengono raccolti in una matrice \mathbf{X} , detta appunto *matrice dei dati grezzi*, la cui struttura viene schematizzata in Fig. 4.1. Si tratta di una matrice rettangolare contenente i segnali ricevuti dalla schiera dal tempo t_1 al tempo t_K ; le *righe* sono i segnali analitici (in funzione del tempo) provenienti da ogni singolo sensore, mentre le colonne $\mathbf{x}(t)$ sono istantanee (*snapshots*) delle uscite dei ricevitori in quadratura.

È interessante capire che aspetto possa avere tale matrice. In Fig. 4.2 viene rappresentata una matrice dei dati grezzi contenente solo rumore termico a varianza unitaria³. Tale rumore può rappresentare indifferentemente il contributo di rumore dovuto al sistema o alla radiosorgente⁴, in ogni caso rappresenta il risultato di un'osservazione corretta. In Fig. 4.3 invece, viene riportato il risultato di un'osservazione affetta da un'interferenza a frequenza $f_1 = 0.01f_c$, $\theta_1 = 30^\circ$ con $INR = +3dB$. Nella Fig. 4.4 viene aggiunta una seconda interferenza. Questa volta si ha $f = 0.10f_c$, $\theta_2 = -60^\circ$ con $INR = +9dB$. In tutti i casi si ha $N = 8$ e $d = \lambda/2$. Come si può vedere la presenza di RFI si ripropone nella matrice dei dati grezzi con

³La matrice è composta da valori complessi. Nei grafici viene riportata solo la componente reale dal momento che la componente immaginaria assume un aspetto analogo.

⁴Sono state sviluppate diverse tecniche per distinguere i due contributi.

delle striature oblique di intensità proporzionali all'INR, pendenza legata alla direzione di provenienza e periodicità legata alla frequenza.

- Viene calcolata (o meglio *stimata*) la *matrice di covarianza* \mathbf{R} .

Per un array composto da N sensori, \mathbf{R} è una matrice quadrata Hermitiana di ordine N .

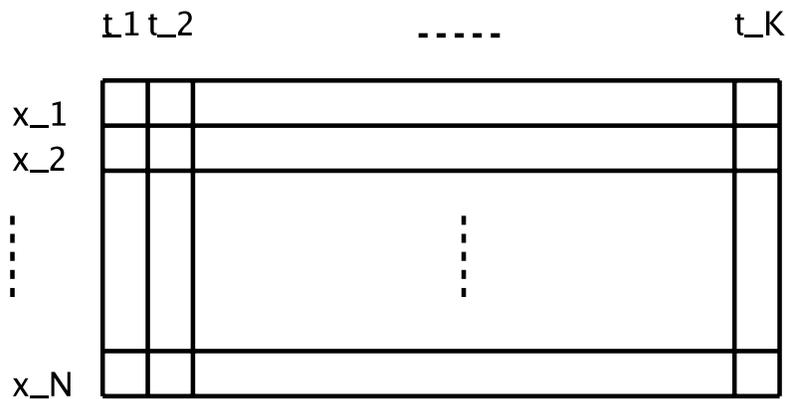


Figura 4.1: Struttura della matrice \mathbf{X} dei dati grezzi.

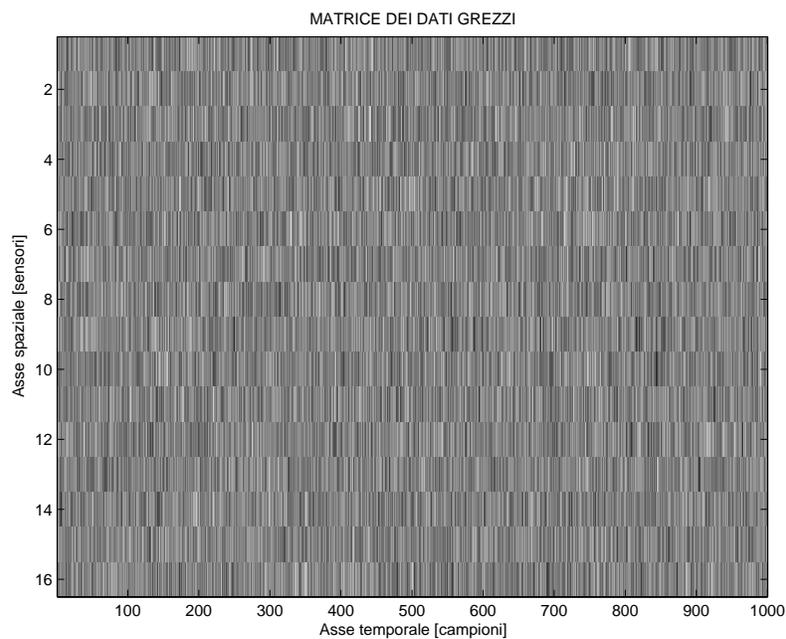


Figura 4.2: Matrice dei dati grezzi per un'osservazione radioastronomica corretta. I dati non sono affetti da alcun disturbo e riportano solo un contributo di rumore dovuto al sistema ed alla radiosorgente ($\sigma_n^2 = 1$, $N = 8$ e $d = \lambda/2$).

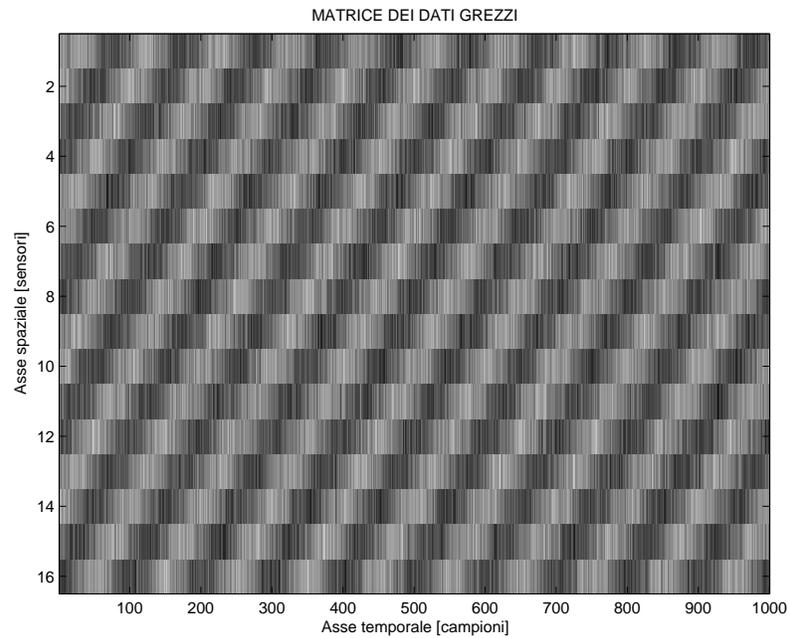


Figura 4.3: Matrice dei dati grezzi per un'osservazione radioastronomica affetta da una radiointerferenza. ($\sigma_n^2 = 1$, $f_1 = 0.01f_c$, $\theta_1 = 30^\circ$, $INR_1 = +3dB$, $N = 8$ e $d = \lambda/2$).

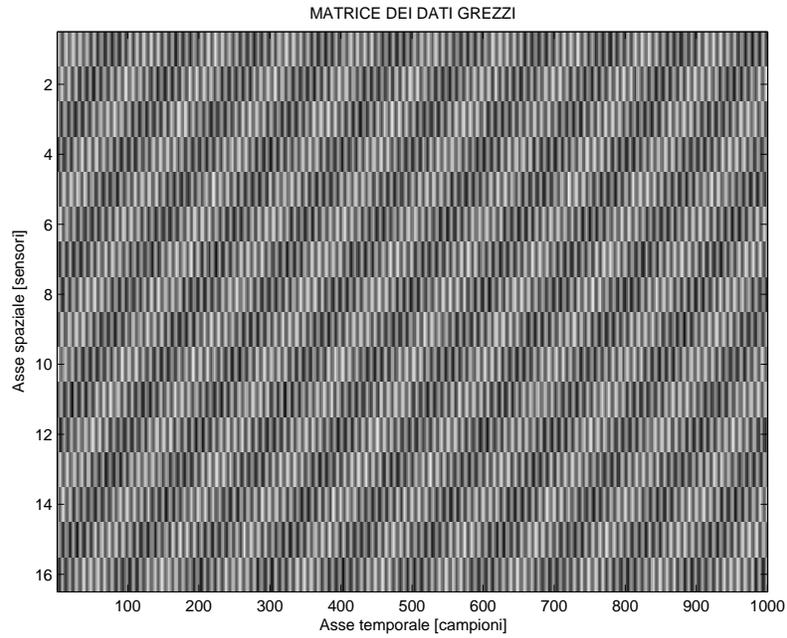


Figura 4.4: Matrice dei dati grezzi per un'osservazione radioastronomica affetta da due radiointerferenze. ($\sigma_n^2 = 1$, $f_1 = 0.01f_c$, $\theta_1 = 30^\circ$, $INR_1 = +3dB$, $f_2 = 0.10f_c$, $\theta_2 = -60^\circ$, $INR_2 = +9dB$, $N = 8$ e $d = \lambda/2$).

Se le DOA dei segnali ed i parametri di calibrazione dell'array restano costanti su un intervallo di tempo di K campioni, allora $\mathbf{R}(t)$ è costante nel tempo⁵ e può essere stimata mediante una media temporale:

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}\mathbf{X}^H = \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k)\mathbf{x}^H(t_k) \quad (4.2)$$

4. Vengono calcolati i coefficienti \mathbf{w} del beamformer:

$$\mathbf{w}(\theta_0) = \frac{\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}(\theta_0)}{\mathbf{d}^H(\theta_0)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{d}(\theta_0)} \quad (4.3)$$

Il calcolo della matrice inversa \mathbf{R}^{-1} può presentare delle difficoltà (vedi paragrafo 4.2.5). In ogni caso per un'implementazione computazionalmente efficiente si consiglia di non ricorrere all'inversione diretta della matrice \mathbf{R} ma di utilizzare la *decomposizione di Cholesky*, descritta in *Numerical Recipes in C*⁶.

4.2.2 Autostruttura della matrice di covarianza

In questo paragrafo viene spiegato il significato degli autovettori della matrice di covarianza e come il loro utilizzo possa essere impiegato nell'ambito del *null steering adattativo*. Gli elementi $r_{i,j}$ della matrice di covarianza rappresentano le uscite dei correlatori per le coppie di antenne i e j . Dal momento che $r_{i,j} = r_{j,i}^*$, la matrice è Hermitiana. I valori della diagonale rappresentano le uscite *total power*. Per lunghi periodi di osservazione, \mathbf{R} deve essere determinata ripetutamente mediando i valori su intervalli di tempo sufficientemente brevi da pensare che le DOA delle interferenze non abbiano subito variazioni notevoli. Nella pratica, questo intervallo di tempo ha un valore compreso tra pochi millisecondi a pochi secondi.

La matrice \mathbf{R} può essere scomposta nei suoi autovettori:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \quad (4.4)$$

dove \mathbf{U} è una matrice delle stesse dimensioni di \mathbf{R} ($N \times N$), le cui righe sono gli autovettori di \mathbf{R} , mentre $\mathbf{\Lambda}$ è una matrice diagonale che ne contiene gli autovalori. Si assume che su intervalli di tempo così brevi, i segnali astronomici all'uscita dei correlatori siano piccoli in confronto al livello *rms*⁷ di rumore. Pertanto, gli autovettori corrispondenti agli autovalori maggiori del livello *rms* di rumore rappresentano le interferenze. In teoria si potrebbe anche fare distinzione tra interferenza e segnali astronomici mediante l'angolo di incidenza: ogni autovettore infatti rappresenta una componente da una distinta direzione spaziale. Il numero

⁵Si sta supponendo l'ipotesi di stazionarietà in senso lato dei segnali e l'ergodicità degli stessi. In pratica si suppone che nell'intervallo di tempo descritto da K campioni le DOA delle RFI non varino in modo significativo. Si tratta di un'ipotesi ragionevole, dal momento che in genere si tratta di tempo relativamente breve.

⁶<http://www.library.cornell.edu/nr/bookcpdf.html>

⁷Root Mean Square. Valore quadratico medio.

di tali sorgenti interferenti deve comunque essere minore di N . Dal momento che \mathbf{R} è Hermitiana, gli autovettori sono ortogonali e possono essere estratti, formando in tal modo degli zeri nelle direzioni corrispondenti alle sorgenti di segnale. Eliminando le righe di \mathbf{U} corrispondenti agli autovalori maggiori del livello *rms* del rumore, è possibile costruire una matrice \mathbf{U}_N . Le colonne della matrice $\mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H$ descrivono il sottospazio occupato dal rumore e dai segnali astronomici. Si può così ricavare una versione filtrata della matrice di covarianza:

$$\mathbf{R}_F = \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \mathbf{R} \mathbf{U}_N \mathbf{U}_N^H \quad (4.5)$$

dalla quale sono state estratte le interferenze. Le stime di \mathbf{R}_F ottenute su brevi intervalli di tempo includono i dati liberi dalle interferenze dai quali può essere ricavata l'immagine astronomica (*imaging*). Dal momento che però ogni elemento di \mathbf{R}_F viene ottenuto da una combinazione lineare degli elementi di \mathbf{R} , non c'è più una semplice relazione di trasformata di Fourier tra \mathbf{R}_F e l'immagine richiesta. Tuttavia, i coefficienti della combinazione lineare sono noti e pertanto sono ancora possibili delle procedure di imaging ma la trattazione di tali argomenti va oltre i limiti preposti in questo lavoro. Per ulteriori approfondimenti a riguardo si consultino i testi in bibliografia ([27], [28], [29], [30]).

4.2.3 Stima degli steering vectors effettivi mediante \mathbf{R}

Se l'array, come capita nella realtà non è composto da sensori ideali (cioè omnidirezionali) ma da sensori con una propria risposta specifica, gli steering vectors *effettivi* differiscono da quelli *ideali* indicati nell'eq. 4.1. Il loro valore effettivo può tuttavia essere stimato a partire dalla matrice di covarianza secondo una procedura che viene descritta a seguito. La procedura viene fornita direttamente per il caso 2D di array *planare*.

Si consideri un generico array bidimensionale di N antenne dove la posizione dell' n -esima antenna vale (x_n, y_n) . Per semplificare le equazioni, tutte le lunghezze vengono normalizzate a $\lambda/2$. Lo *steering vector*, $\mathbf{d}(\theta, \phi)$, è la risposta di ogni antenna ad un segnale di potenza unitaria proveniente dalla direzione (θ, ϕ) , dove θ rappresenta l'angolo di *azimuth* e ϕ l'angolo di *elevazione*, misurati a partire dalla normale al piano dell'array (Fig. 4.5).

L' n -esimo elemento di $\mathbf{d}(\theta, \phi)$ vale:

$$d_n(\theta, \phi) = b_n(\theta, \phi) e^{j\pi(x_n \sin \theta + y_n \cos \theta \sin \phi)} \quad (4.6)$$

dove b_n è uno scalare complesso di ampiezza g_n e fase ψ_n che tiene conto delle risposte delle singole antenne e degli effetti dell'elettronica.

Calibrare un array essenzialmente significa misurare l'insieme (detto *array manifold*) di tutti i suoi steering vectors. L'insieme di tutti gli steering vectors è ovviamente infinito e pertanto, in pratica, ne viene misurato solo un sottoinsieme finito, su una griglia regolare di punti che rappresentano direzioni di puntamento. Sia

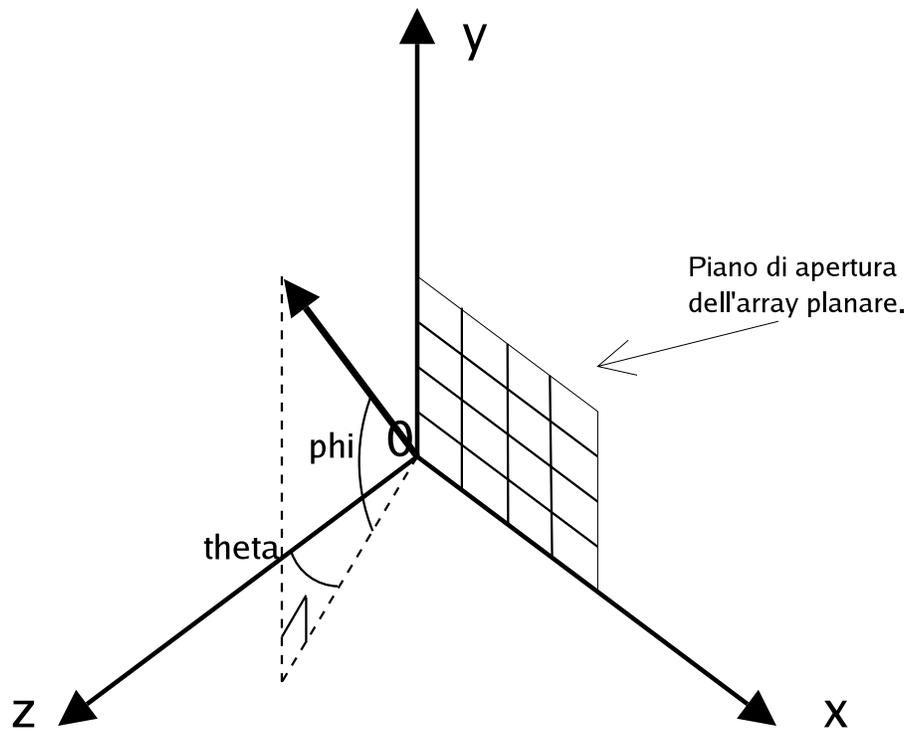


Figura 4.5: Sistema di riferimento 2D usato per descrivere gli array planari.

$$l_n(\theta, \phi) = e^{j\pi(x_n \sin \theta + y_n \cos \theta \sin \phi)} \quad (4.7)$$

in modo da avere:

$$d_n(\theta, \phi) = b_n(\theta, \phi)l_n(\theta, \phi) \quad (4.8)$$

Il vettore $l_n = [l_1, l_2, \dots, l_N]^T$ è il vettore che contiene lo steering vector *ideale* associato all' n -esimo sensore e dipendente esclusivamente dalla *geometria* dell'array. Essendo noti (x_n, y_n) tale vettore risulta essere facilmente calcolabile.

Le risposte delle antenne, $b_n(\theta, \phi)$, sono complicate funzioni che non possono essere facilmente calcolate. L'obiettivo è dunque quello di misurare e salvare su una qualche forma di memoria le risposte delle singole antenne. Nel processo di beamforming si ricorrerà poi ad un'interpolazione per ricavare le risposte dell'antenna fuori dai punti della griglia di misura.

Dalla 4.6, essendo noti gli $l_n(\theta, \phi)$ si potranno ricavare i $d_n(\theta, \phi)$.

Le misure di calibrazione si basano ancora una volta sulla matrice di covarianza \mathbf{R} . Si assume che il rumore sia incorrelato e che ci sia solo un segnale a potenza nota (unitaria) che incida sull'array da una direzione nota (θ, ϕ) . In pratica, deve essere nota con grande accuratezza la direzione di provenienza del segnale.

Allora, l'elemento j, k -esimo della matrice di covarianza è espresso da:

$$R_{j,k} = d_j d_k^* + \delta_{jk} \sigma_j^2 = (b_j b_k^*)(l_j l_k^*) + \delta_{jk} \sigma_j^2 \quad (4.9)$$

dove σ_j^2 è la potenza di rumore alla j -esima antenna. Conoscendo gli l_j è dunque possibile dividere la 4.9 per $l_j l_k^*$ e ricondursi ad un problema lineare ricorrendo ai valori logaritmici. L'equazione, scomposta nelle sue parti reale (4.10) ed immaginaria (4.11) diviene:

$$\log \left| \frac{R_{j,k}}{l_j l_k^*} \right| = \log(g_j) + \log(g_k) \quad \forall k > j \quad (4.10)$$

$$\angle \frac{R_{j,k}}{l_j l_k^*} = \psi_j - \psi_k \quad \forall k > j \quad (4.11)$$

Le espressioni 4.10 e 4.11 definiscono un insieme di equazioni sovradeterminato perchè si hanno $N(N-1)/2$ equazioni in sole N incognite. Supponendo che si abbia sempre

$$|\psi_j - \psi_k| < \pi \quad (4.12)$$

cioè che non vi sia ambiguità di fase, è possibile risolvere la 4.10 e la 4.11 in g_j e ψ_j ricorrendo per esempio alla regressione lineare. Poichè la 4.11 include solo delle differenze di fase la soluzione per i ψ_j in genere non è univoca. La soluzione è unica qualora si assuma che il primo sensore dell'array sia l'origine dell'array e che quindi si abbia:

$$\psi_1 = 0 \quad (4.13)$$

Si osservi che anche in regime adattativo (come nel caso deterministico) la spaziatura tra i sensori maggiore di $\lambda/2$ porta ad equivocazione spaziale: gli steering vectors risultano *ambigui* in quanto ad ognuno di essi possono corrispondere più direzioni di arrivo⁸. Il problema si ripercuote anche sull'algoritmo di adaptive nulling in quanto le DOA effettivamente disponibili per il posizionamento degli zeri risultano notevolmente ridotte. Il posizionamento di uno zero in direzione di un lobo di grating anche in questo caso porta necessariamente ad una notevole distorsione del beam (vedi paragrafo 4.3.4).

4.2.4 Velocità di convergenza della matrice di covarianza

Un punto essenziale per l'algoritmo MVDR adattativo consiste nel capire quanti punti (*snapshots*) debbano essere impiegati per la stima della matrice di covarianza e degli steering vectors effettivi per un certo livello di accuratezza. Un metodo per studiare la convergenza di \mathbf{R} consiste nell'osservare l'andamento della varianza media della matrice, cioè della media delle varianze di ogni suo elemento. Si osserva una convergenza asintotica di $\hat{\mathbf{R}}$ al crescere del numero (K) di punti usati per la stima. La velocità di convergenza si dimostra⁹ essere proporzionale al fattore:

$$\frac{1}{\sqrt{BK}} \quad (4.14)$$

dove B è la banda del sistema.

Gli steering vectors sono legati da una relazione lineare alla matrice $\hat{\mathbf{R}}$. Pertanto anche le loro ampiezze e fasi convergono proporzionalmente al fattore 4.14. La forma esatta della convergenza degli steering vectors dipende dal numero di sensori; un numero maggiore di sensori produrrà stime più accurate. Il valore ottimo di K è da determinarsi sperimentalmente ma generalmente assume valori che vanno da qualche decina a qualche centinaio.

4.2.5 Iniezione di rumore artificiale e calcolo di \mathbf{R}^{-1}

Come è stato mostrato nel capitolo 2, nel caso ideale in cui i segnali che incidono sull'array non siano affetti da rumore, la matrice di covarianza è *singolare* e pertanto non invertibile. In tal caso non è neppure possibile calcolare l'espressione dei coefficienti ottimi del beamformer indicati dalla 4.3. Si tratta tuttavia di un caso puramente teorico (per quanto paradossale): nella realtà il rumore, seppur basso, è sempre presente e questo fa sì che \mathbf{R} non sia mai

⁸L'ambiguità in ultimo è riconducibile alla spaziatura regolare tra i vari sensori. Alcuni enti scientifici stanno studiando mediante metodi euristici geometrie alternative a quella lineare che siano in grado di evitare i lobi di grating e dunque consentano di risolvere i problemi legati all'ambiguità spaziale.

⁹Per una dimostrazione si consulti ad esempio: John D. Kraus. *Radio Astronomy*. ISBN I-882484-00-2. Cygnus-Quasar Books, 2nd edition, 1986.

singolare e dunque sia sempre invertibile.

Tuttavia talvolta può capitare che \mathbf{R} risulti essere *malcondizionata*¹⁰, in tal caso è possibile *ricondizionare* la matrice sommando alla matrice \mathbf{R} un contributo di rumore artificiale $\sigma_a^2 \mathbf{I}$. Aggiungendo rumore si migliora il condizionamento della matrice (Fig. 4.6). Tuttavia al crescere di σ_a^2 si perdono sempre più profondità negli zeri e risoluzione nel beam. Al limite, per $\sigma_a^2 \rightarrow \infty$ il beamformer MVDR coincide con il beamformer classico.

4.3 Esempi di MVDR adattativo con analisi SVD (Singular Value Decomposition)

In questo paragrafo vengono illustrate delle simulazioni condotte in ambiente MATLAB per saggiare le prestazioni dell'algorithmo MVDR adattativo in situazioni emblematiche.

4.3.1 Esempio 1: MVDR adattativo in assenza di equivocazione spaziale

La situazione per l'Esempio 1 viene riassunta in Tab. 4.1.

Parametro	Valore
Numero sensori	8
Tipo sensore	ideale
Spaziatura sensori	$\lambda/2 @ f_c/2$
Campioni usati per $\hat{\mathbf{R}}$	200
DOA puntamento	+20°
DOA RFI	-30° + 50° - 50°
Ampiezze RFI	2 4 3
Frequenze RFI	$0.10f_c$ $0.25f_c$ $0.30f_c$
Varianza rumore naturale σ_n^2	0.001
Varianza rumore artificiale σ_a^2	0.001

Tabella 4.1: Parametri utilizzati nell'Esempio 1.

Si hanno dunque 8 sensori ideali equispaziati ad una distanza di $\lambda/2$ in corrispondenza della frequenza che segna l'estremo superiore della banda ($f_c/2$). L'osservazione dura complessivamente 1000 campioni e in Fig. 4.7 viene visualizzata la matrice dei dati grezzi. Si notano le striature oblique, che indicano la presenza di RFI.

In Fig. 4.8 viene visualizzato nel dominio del tempo il segnale in uscita dal primo sensore dell'array. Si vedono chiaramente i segnali sovrapposti al rumore di sistema.

¹⁰Una matrice si dice malcondizionata quando ha un elevato *numero di condizionamento*. Tale numero esprime il rapporto tra gli autovalori massimo e minimo della matrice stessa e se risulta elevato vuol dire che tale matrice è *prossima* alla singolarità. In tal caso l'inversione può portare a dei risultati poco accurati.

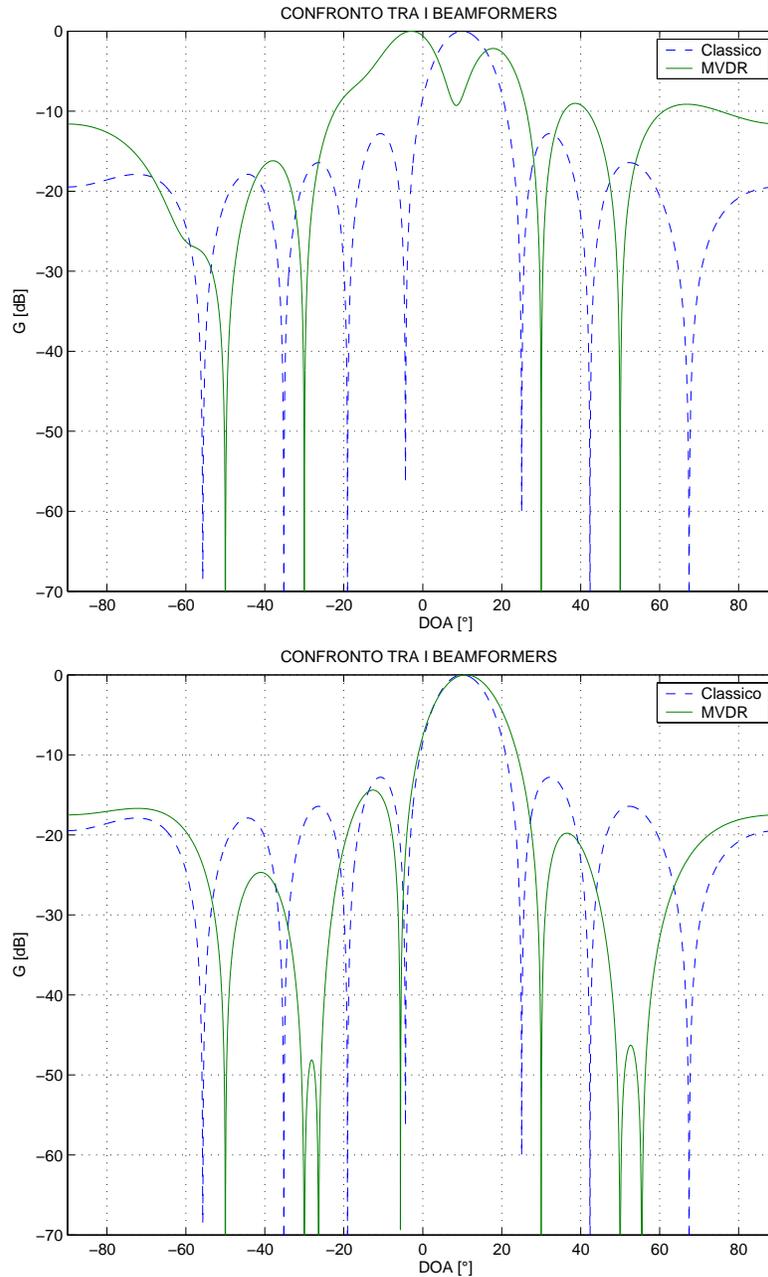


Figura 4.6: Esempio di miglioramento del beamformer mediante aggiunta di rumore artificiale. Beamformer ottenuto per $N = 8$, $d = \lambda/2$, puntamento: $\theta_0 = 10^\circ$, RFI: $\theta_1 = +50^\circ$, $\theta_2 = -30^\circ$. Nel primo caso il rumore è praticamente assente: la matrice \mathbf{R} è fortemente mal condizionata ed il beamformer inaccurato. Nel secondo caso si può vedere il risultato ottenuto aggiungendo ad \mathbf{R} del rumore artificiale $\sigma_a^2 \mathbf{I}$ con $\sigma_a^2 = 1$.

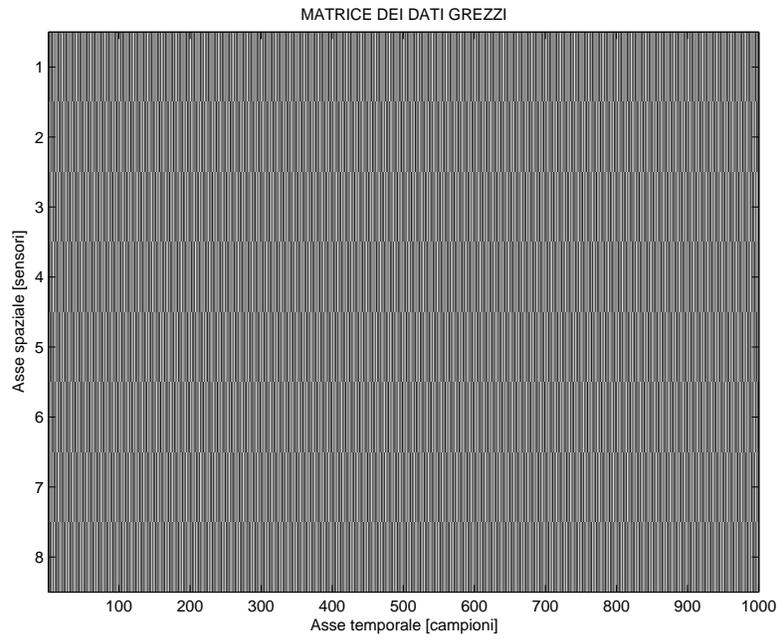


Figura 4.7: Matrice dei dati grezzi per l'Esempio 1.

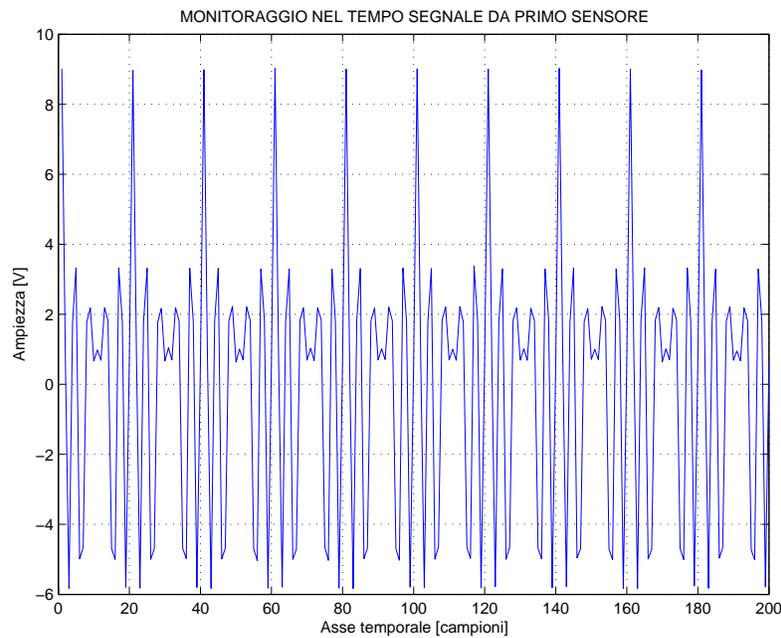


Figura 4.8: Segnale in uscita dal primo sensore (dominio del tempo) per l'Esempio 1.

Un quadro più chiaro dello scenario viene fornito in Fig. 4.9 dove lo stesso segnale di Fig. 4.8 viene riportato nel dominio della frequenza. Si osserva la presenza di 3 RFI nella banda di osservazione.

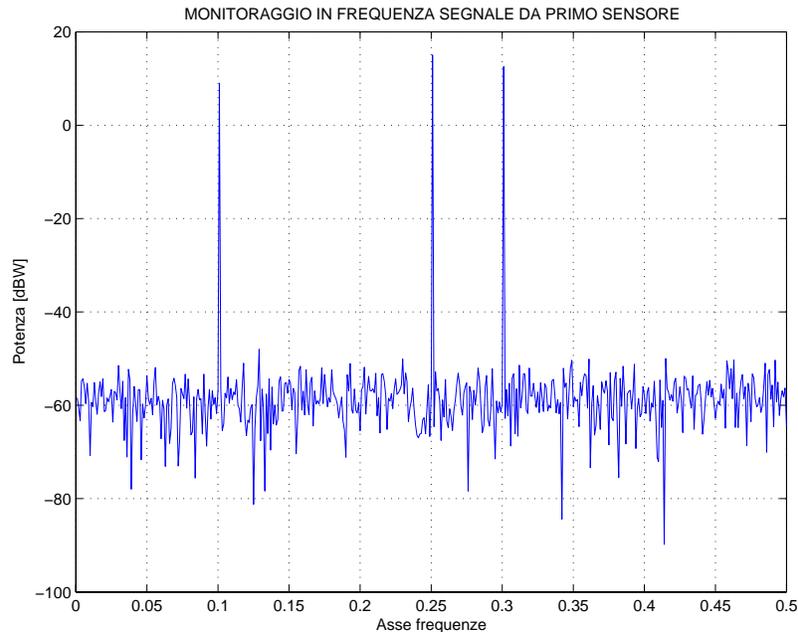


Figura 4.9: Segnale in uscita dal primo sensore (dominio della frequenza) per l'Esempio 1.

I primi 200 campioni vengono utilizzati per effettuare una stima della matrice di covarianza (Fig. 4.10). Dal calcolo dei coefficienti ottimi, secondo la 4.3, risulta il beampattern di Fig. 4.11.

E' interessante osservare anche l'andamento dell'autostruttura della matrice di covarianza. In Fig. 4.12 viene riportato l'andamento degli autovalori di $\hat{\mathbf{R}}$. Si osserva che si hanno 3 autovalori dominanti, esattamente quante sono le RFI. L'autovalore è tanto maggiore quanto più intensa è l'RFI ad esso associata. Dagli autovettori corrispondenti è inoltre possibile stimare (in questo caso senza ambiguità) la direzione di provenienza delle RFI. In Fig. 4.13 si osserva l'andamento del primo autovettore che, essendo associato all'autovalore maggiore è anche quello che punta all'RFI più intensa ($\theta_2 = +50^\circ$). Un risultato analogo si ha per l'autovettore 2 e l'autovettore 3 (Figg. 4.14 e 4.15) che puntano rispettivamente a $\theta_3 = -50^\circ$ e $\theta_1 = -30^\circ$.

Gli autovettori rimanenti (Figg. 4.16, 4.17, 4.18, 4.19 e 4.20) non descrivono lo spazio occupato dalle RFI ma dal rumore astronomico e di sistema. Ad essi non viene attribuito un significato particolare in termini di RFI.

4.3.2 Esempio 2: Interferenze all'interno del main beam

Se un'interferenza proviene da una direzione che cade all'interno dell'apertura FWBN del beam, il MVDR beamformer porrà uno zero in corrispondenza di tale DOA producendo però gravi distorsioni

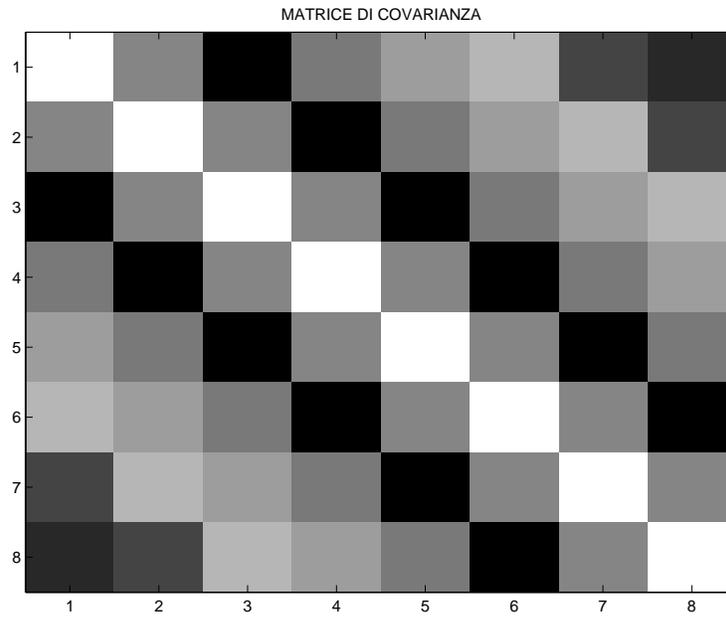


Figura 4.10: Rappresentazione grafica della matrice di covarianza per l'Esempio 1.

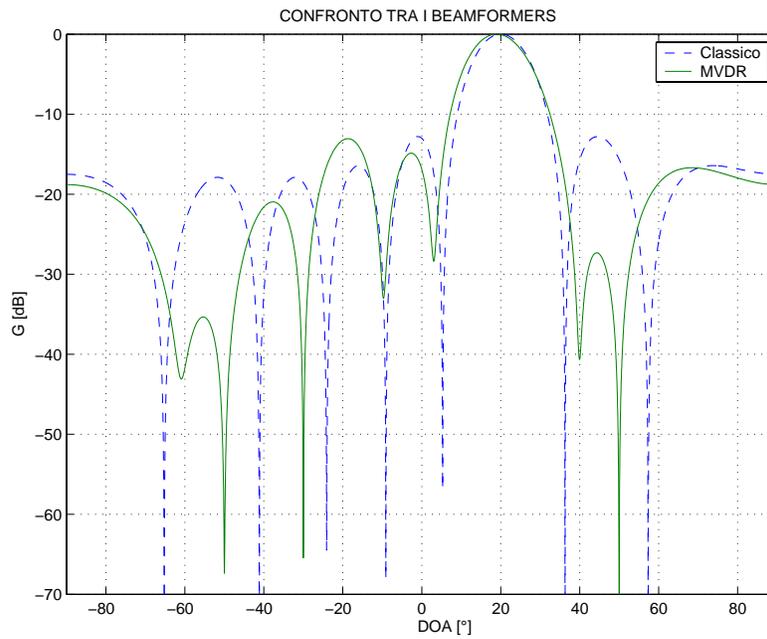


Figura 4.11: Beampattern ottenuto mediante MVDR adattativo per l'Esempio 1. Per confronto viene riportato anche il beamformer classico.

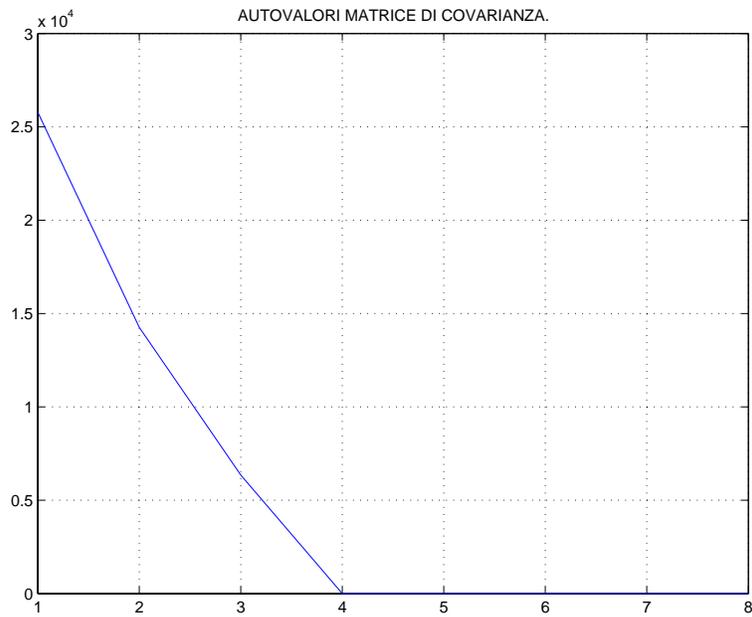


Figura 4.12: Andamento degli autovalori per l'Esempio 1.

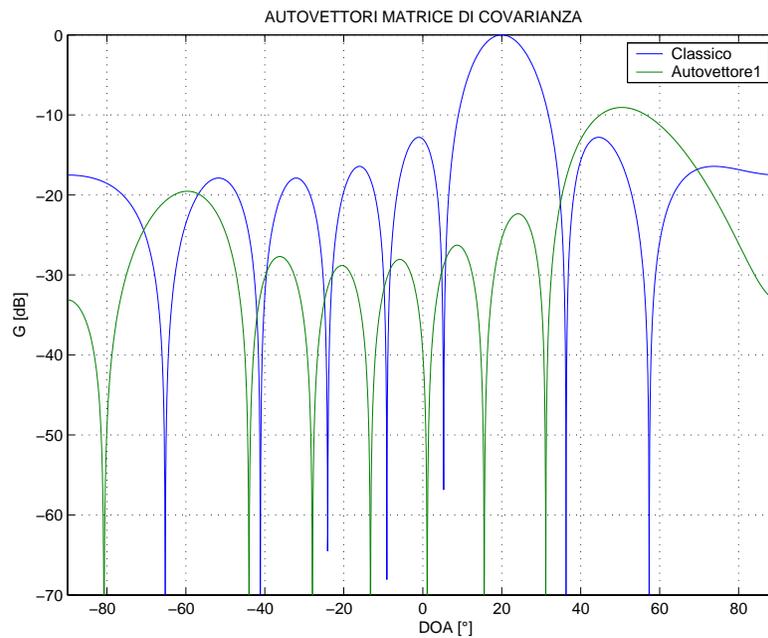


Figura 4.13: Andamento del primo autovettore (dominante) per l'Esempio 1. Risulta puntare in direzione della seconda RFI ($\theta_2 = +50^\circ$), la prima in termini di intensità.

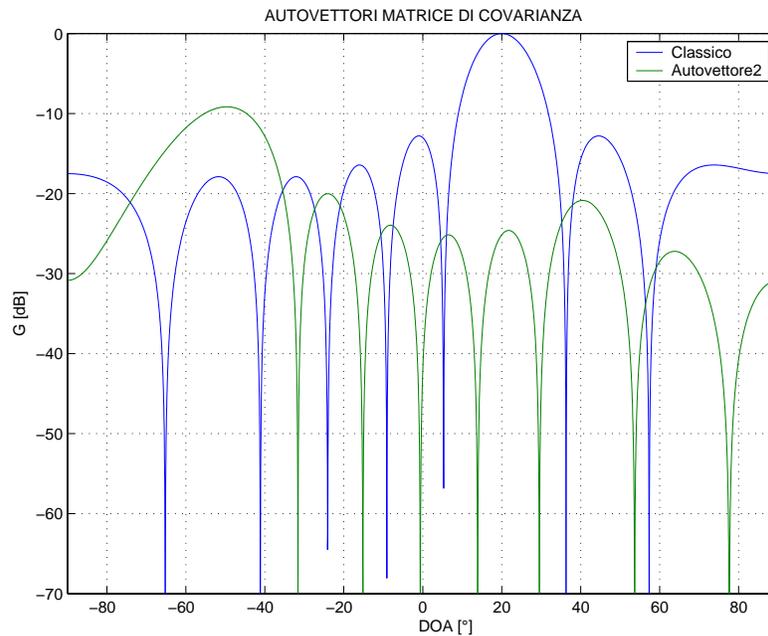


Figura 4.14: Andamento del secondo autovettore per l'Esempio 1. Risulta puntare a -50° , in corrispondenza della seconda RFI in termini di intensità.

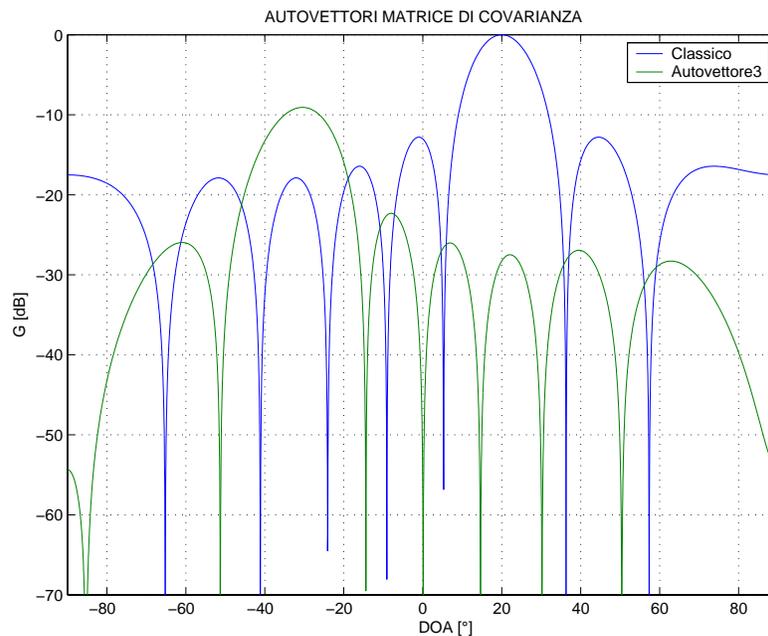


Figura 4.15: Andamento del terzo autovettore per l'Esempio 1. Risulta puntare a -30° , in corrispondenza della RFI di intensità minore.

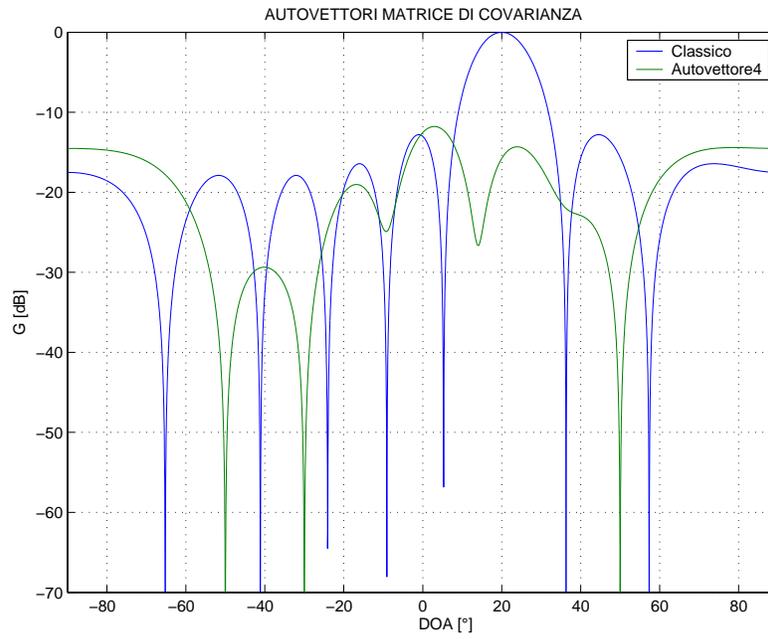


Figura 4.16: Andamento del 4° autovettore per l'Esempio 1.

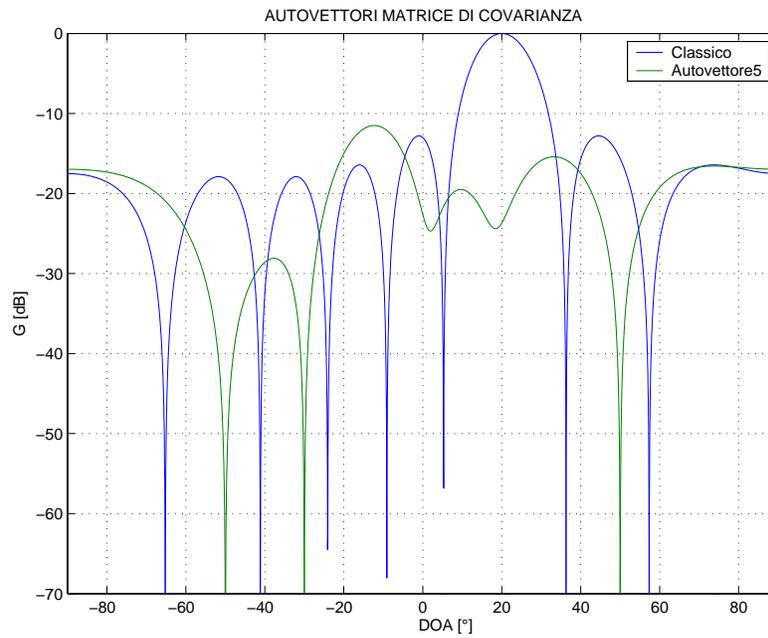


Figura 4.17: Andamento del 5° autovettore per l'Esempio 1.

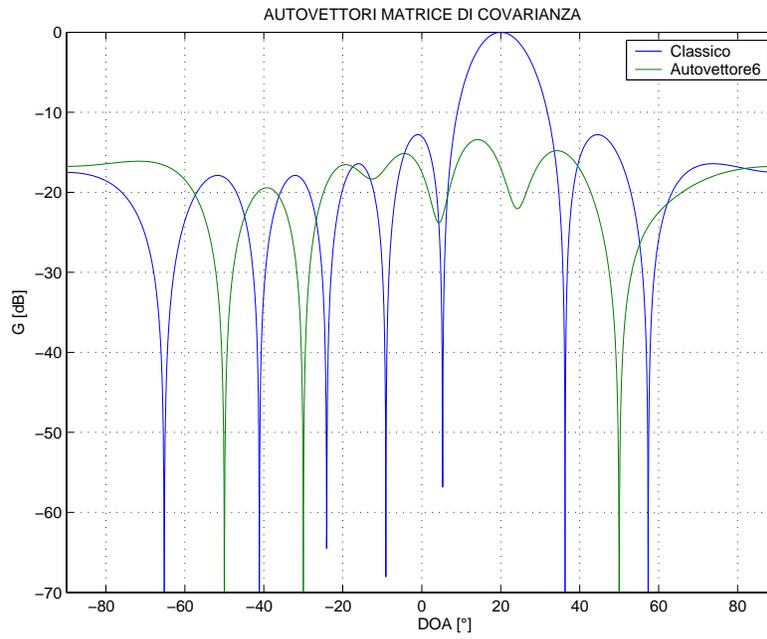


Figura 4.18: Andamento del 6° autovettore per l'Esempio 1.

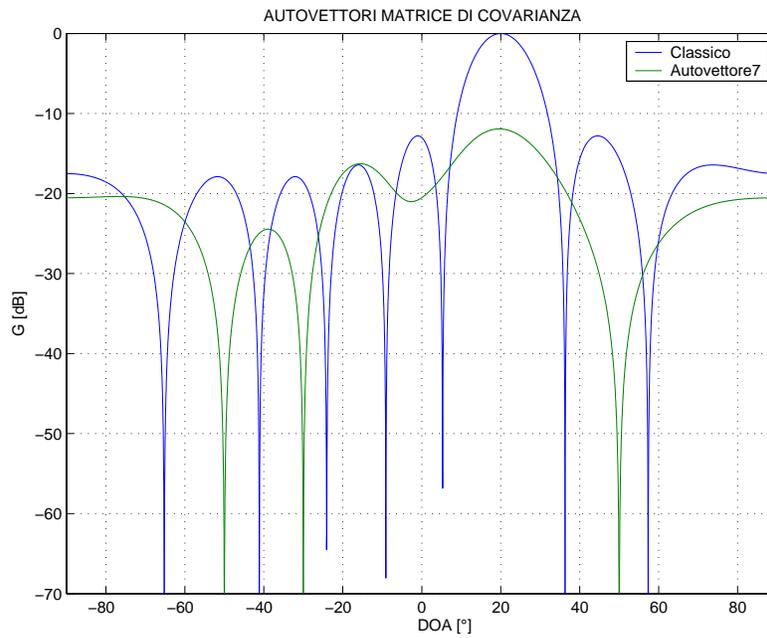


Figura 4.19: Andamento del 7° autovettore per l'Esempio 1.

al main lobe. In tal caso non è possibile effettuare correttamente, mediante semplice filtraggio spaziale, un'osservazione astronomica senza che questa sia affetta da disturbi. In Fig. 4.21 viene riportato il beampattern che si ottiene in condizioni analoghe all'esempio precedente, qualora la DOA della seconda interferenza passi da $\theta_2 = +50^\circ$ a $\theta_2 = +26^\circ$.

Ad ulteriore conferma di quanto esposto viene riportato anche l'andamento degli autovalori (Fig. 4.22) e dei primi 3 autovettori della matrice di covarianza (Figg. 4.23, 4.24 e 4.25). Si osservi come il primo autovettore risulti puntare all'interno del beam.

4.3.3 Esempio 3: MVDR adattativo in equivocazione spaziale

Quando la spaziatura tra i sensori risulta essere maggiore di $\lambda/2$ le DOA risultano essere equivocate ed allo stesso steering vector (quindi anche allo stesso autovettore) possono essere associate più DOA distinte. L'esempio che segue riproduce una di queste situazioni. In Tab. 4.2 vengono riportati i parametri di simulazione. Si tratta di un caso interessante perchè come in BEST-1 si tratta di un array composto da 4 sensori distanziati di 8λ .

In questo esempio le DOA delle RFI ($\theta_1 = -33^\circ$ e $\theta_2 = +14^\circ$) cadono all'esterno dei lobi di grating e la soluzione risulta essere accettabile. In Fig. 4.26 viene riportato il beampattern ottenuto dal calcolo dei coefficienti ottimi.

Per chiarezza nelle Figg. 4.27, 4.28 e 4.29 vengono riportati i dettagli del beampattern in corrispon-

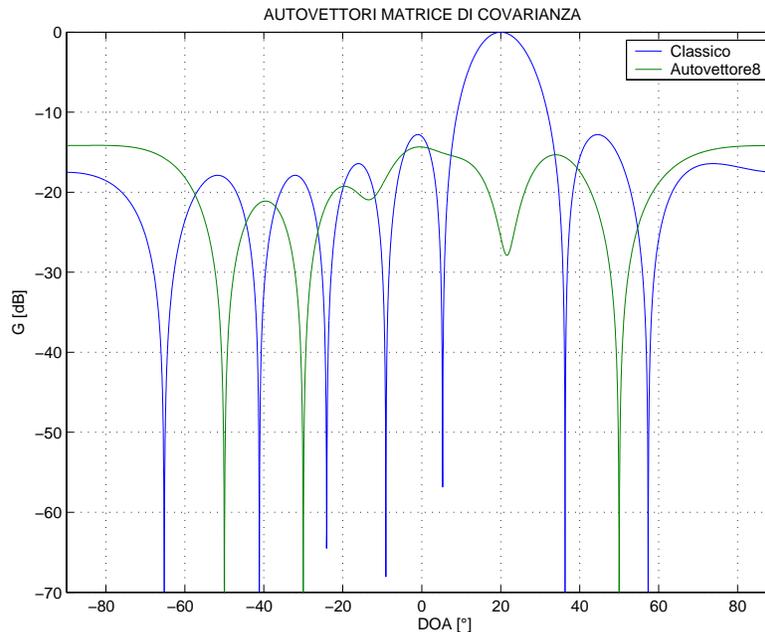


Figura 4.20: Andamento del 8° autovettore per l'Esempio 1.

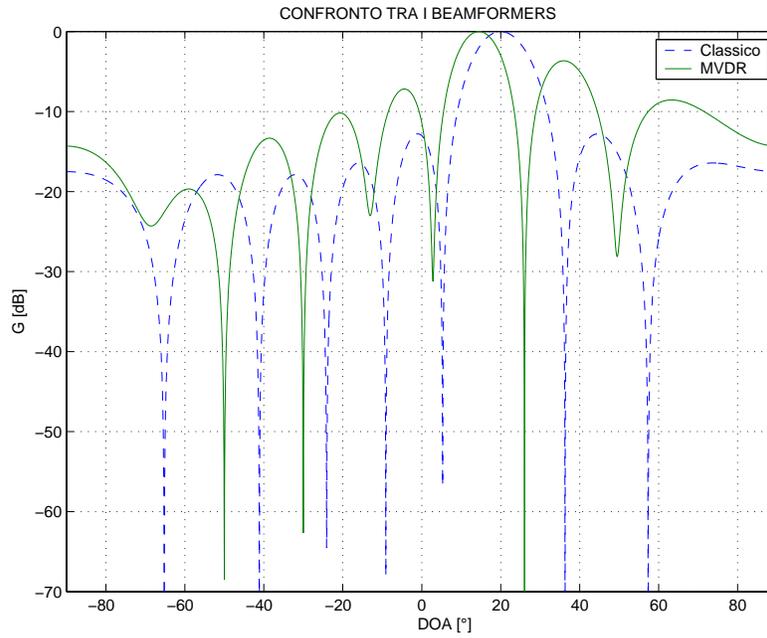


Figura 4.21: Beampattern per l'Esempio 2. Una RFI proviene da una DOA interna all'apertura FWBN del beam ($\theta_2 = +26^\circ$). Il main lobe subisce una notevole distorsione che rende inutilizzabile il beamformer.

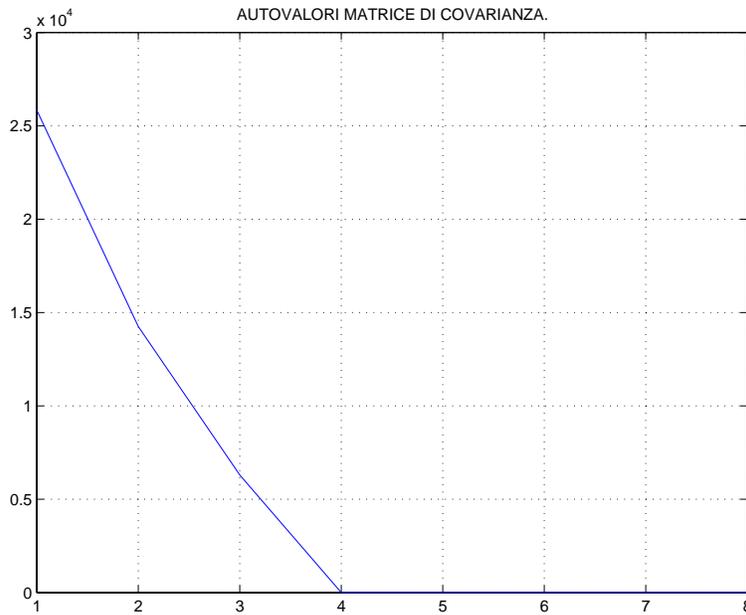


Figura 4.22: Andamento degli autovalori per l'Esempio 2.

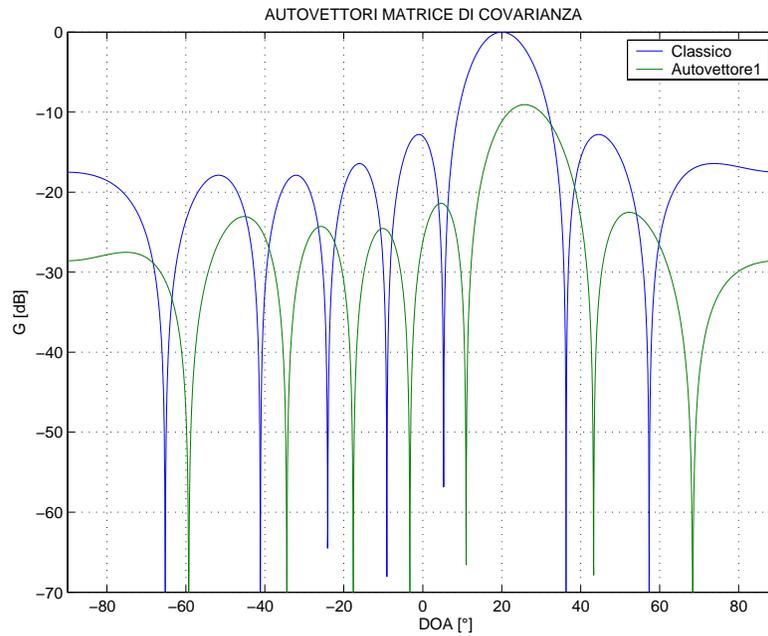


Figura 4.23: Andamento del primo autovettore per l'Esempio 2. Si ha una RFI proveniente da DOA interna all'apertura del beam ($\theta_0 = +20^\circ$, $\theta_1 = +26^\circ$).

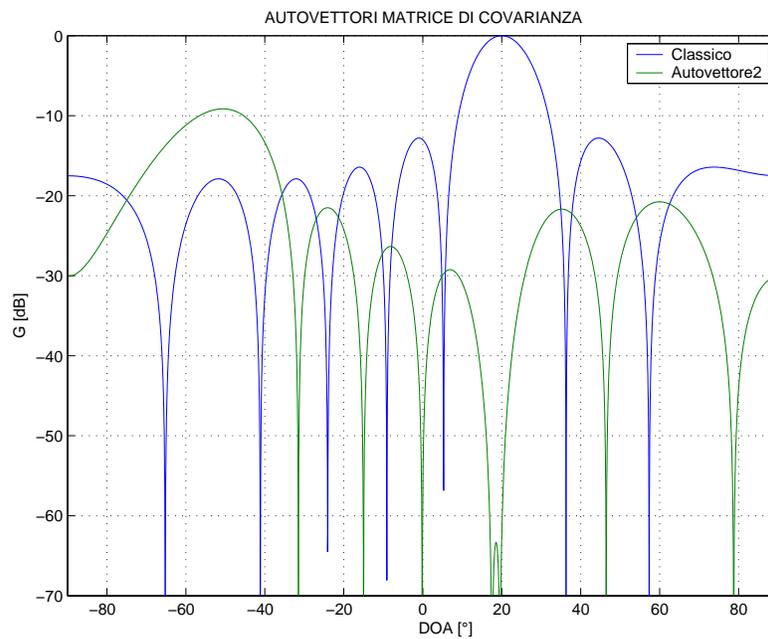


Figura 4.24: Andamento del secondo autovettore per l'Esempio 2.

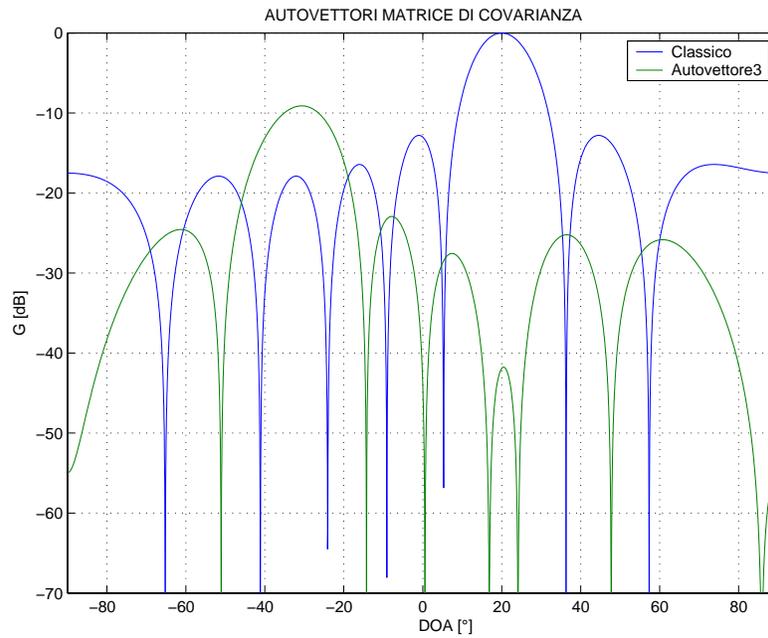


Figura 4.25: Andamento del terzo autovettore per l'Esempio 2.

Parametro	Valore
Numero sensori	4
Tipo sensore	ideale
Spaziatura sensori	$8\lambda @ f_c/2$
Campioni usati per $\hat{\mathbf{R}}$	200
DOA puntamento	$+2^\circ$
DOA RFI	$-33^\circ + 14^\circ$
Ampiezze RFI	2 4
Frequenze RFI	$0.10f_c$ $0.25f_c$
Varianza rumore naturale σ_n^2	0.001
Varianza rumore artificiale σ_a^2	0.001

Tabella 4.2: Parametri utilizzati nell'Esempio 3.

denza della direzione di puntamento ($\theta_0 = +2^\circ$) e delle RFI ($\theta_1 = -33^\circ$ e $\theta_2 = +14^\circ$).

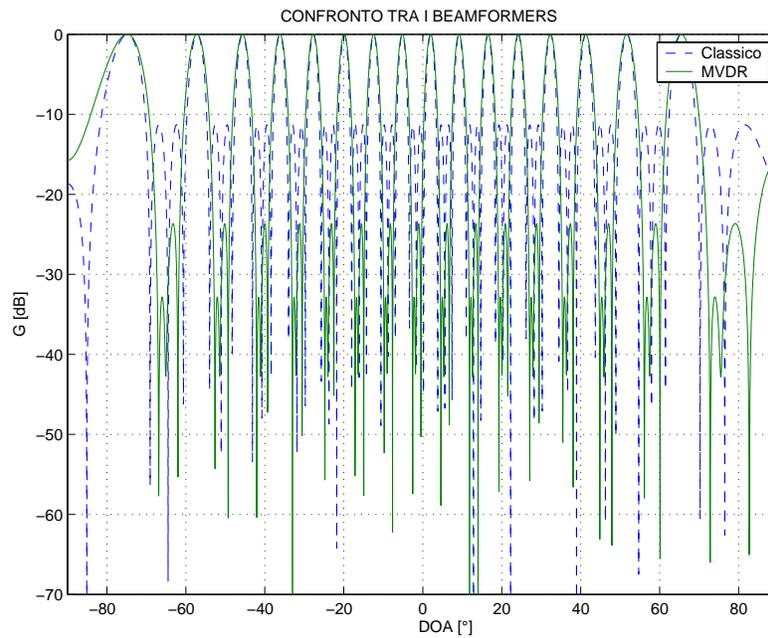


Figura 4.26: Beampattern ottenuto per l'Esempio 3.

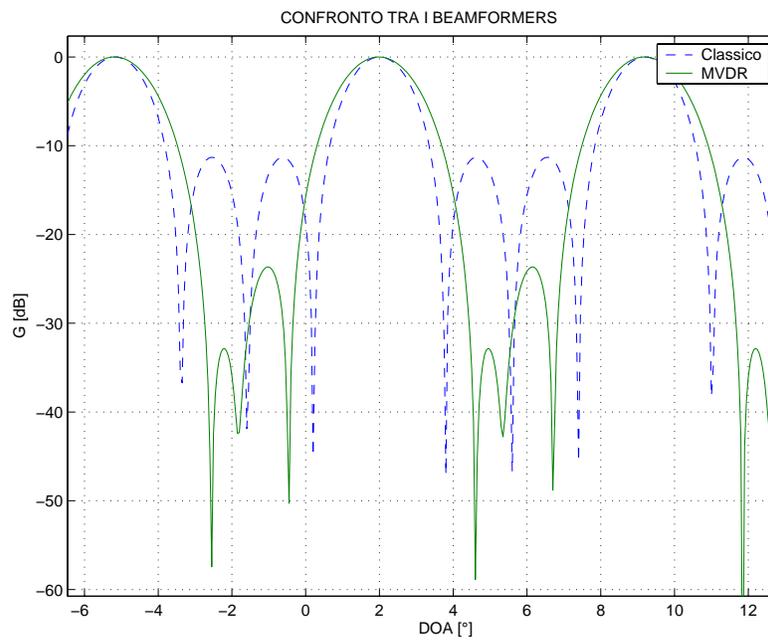


Figura 4.27: Dettaglio del beampattern per l'Esempio 3 nell'intorno della direzione di osservazione $\theta_0 = +2^\circ$.

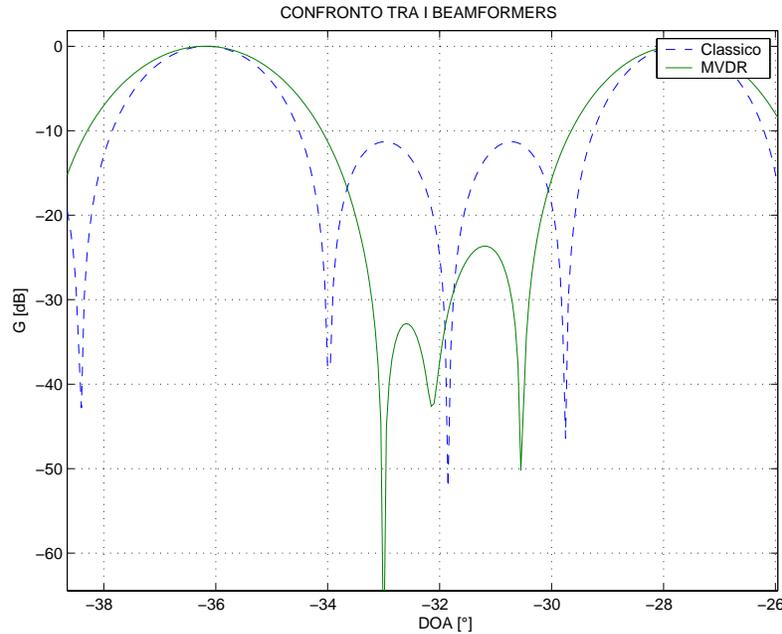


Figura 4.28: Dettaglio del beampattern per l'Esempio 3 nell'intorno della DOA della prima RFI $\theta_1 = -33^\circ$.

L'equivocazione nella determinazione della DOA delle RFI risulta particolarmente evidente osservando gli autovettori dominanti della matrice di covarianza. Il primo (Fig. 4.30) risulta puntare a in direzione della RFI di maggiore intensità $\theta_2 = +14^\circ$ ma anche in tutte le direzioni equivocate. Analogamente per il secondo autovettore (vedi Figg. 4.31).

4.3.4 Esempio 4: Interferenze all'interno dei lobi di grating

Nel caso una RFI dovesse provenire da una DOA che rientra nell'apertura FNBW di un lobo di grating, si verrebbe a ricreare la stessa spiacevole situazione descritta nell'Esempio 2, in cui il posizionamento di uno zero causa una distorsione del main lobe che rende inaccettabile il beamformer trovato.

In Fig. 4.32 viene riportato il beampattern che si otterrebbe nelle stesse condizioni dell'Esempio 3 qualora una delle due RFI provenisse da $\theta_2 = +16^\circ$ anzichè $\theta_2 = +14^\circ$. Viene riportato anche un dettaglio in corrispondenza della direzione di puntamento $\theta_0 = +2^\circ$.

4.4 Algoritmo MVDR adattativo con BEST-1

Gli ultimi 2 esempi mostrati (paragrafi 4.3.3 e 4.3.4) sono particolarmente interessanti per la configurazione adottata: $N = 4$ sensori spazati di $d = 8\lambda$, la stessa usata nel caso di BEST-1. Sebbene

per tali esempi siano stati considerati sensori *ideali* le considerazioni tratte possono essere estese facilmente anche a BEST-1, dal momento che i beampattern mostrati altro non sono che i *fattori di gruppo* per BEST-1¹¹. Per calcolare i beampattern complessivi occorre dunque tenere in considerazione anche la direttività dei singoli sensori i quali non risultano essere più *omnidirezionali* (vedi Fig. 4.33).

4.4.1 Esempio 5: MVDR adattativo con BEST-1

L'Esempio che viene ora illustrato riporta i diversi effetti che possono originare i sensori non ideali. I parametri di simulazione sono riportati in Tab. 4.3.

In Fig. 4.34 viene riportata la matrice dei dati grezzi. Ancora una volta si osservano le striature oblique, segno della presenza di RFI nei dati ricevuti.

In Fig. 4.35 ed in Fig. 4.36 è possibile osservare il segnale ricevuto dal primo sensore nel dominio del tempo e della frequenza. Già nell'ultimo grafico si osserva un'apparente anomalia: la mancanza della terza interferenza, quella di maggiore intensità, a frequenza $0.15f_c$. L'assenza si spiega facilmente andando ad osservare la sua DOA ($\theta_3 = +30^\circ$) ed il diagramma di direttività del sensore di BEST-1

¹¹Si ricorda che per un schiera di sensori omogenea, il beampattern complessivo è il prodotto tra il beampattern del singolo sensore per il fattore di gruppo dell'array.

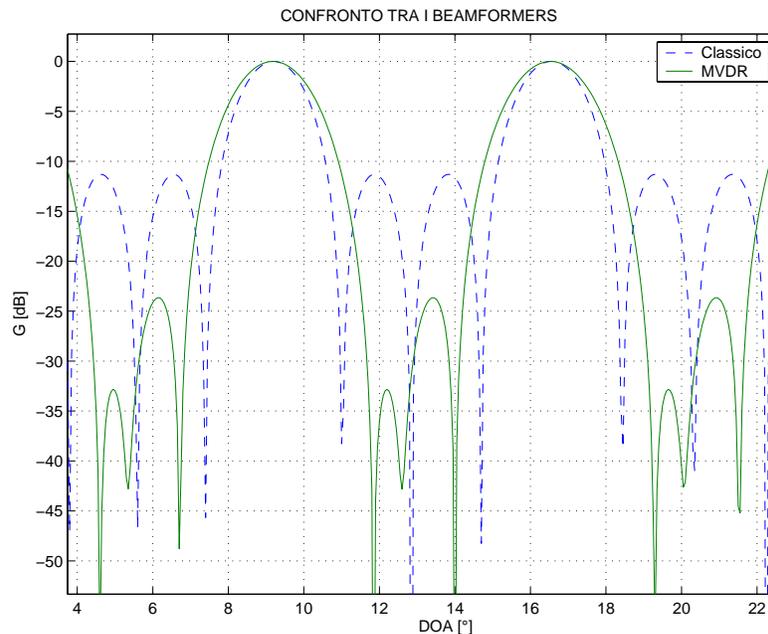


Figura 4.29: Dettaglio del beampattern per l'Esempio 3 nell'intorno della DOA della seconda RFI $\theta_2 = +14^\circ$.

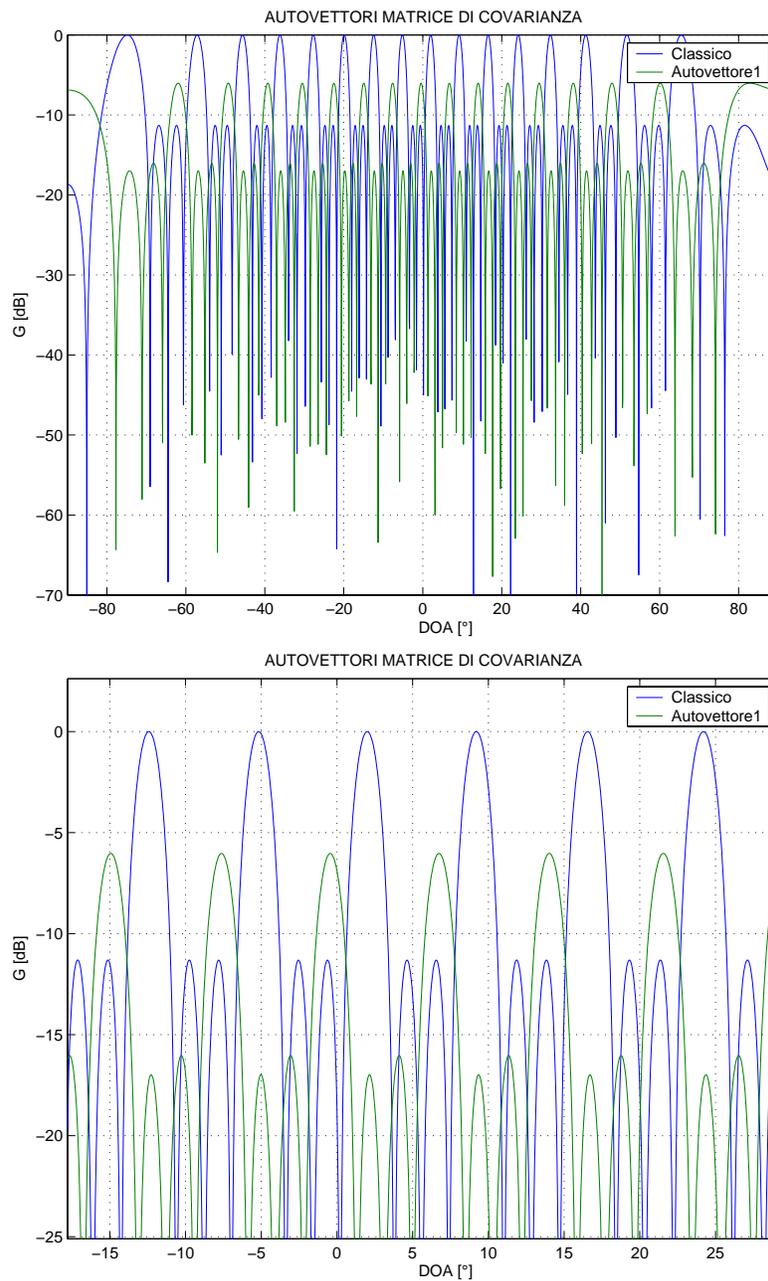


Figura 4.30: Andamento del primo autovettore dell'Esempio 3 e relativo dettaglio nell'intorno della DOA della RFI dominante $\theta_2 = +14^{\circ}$.

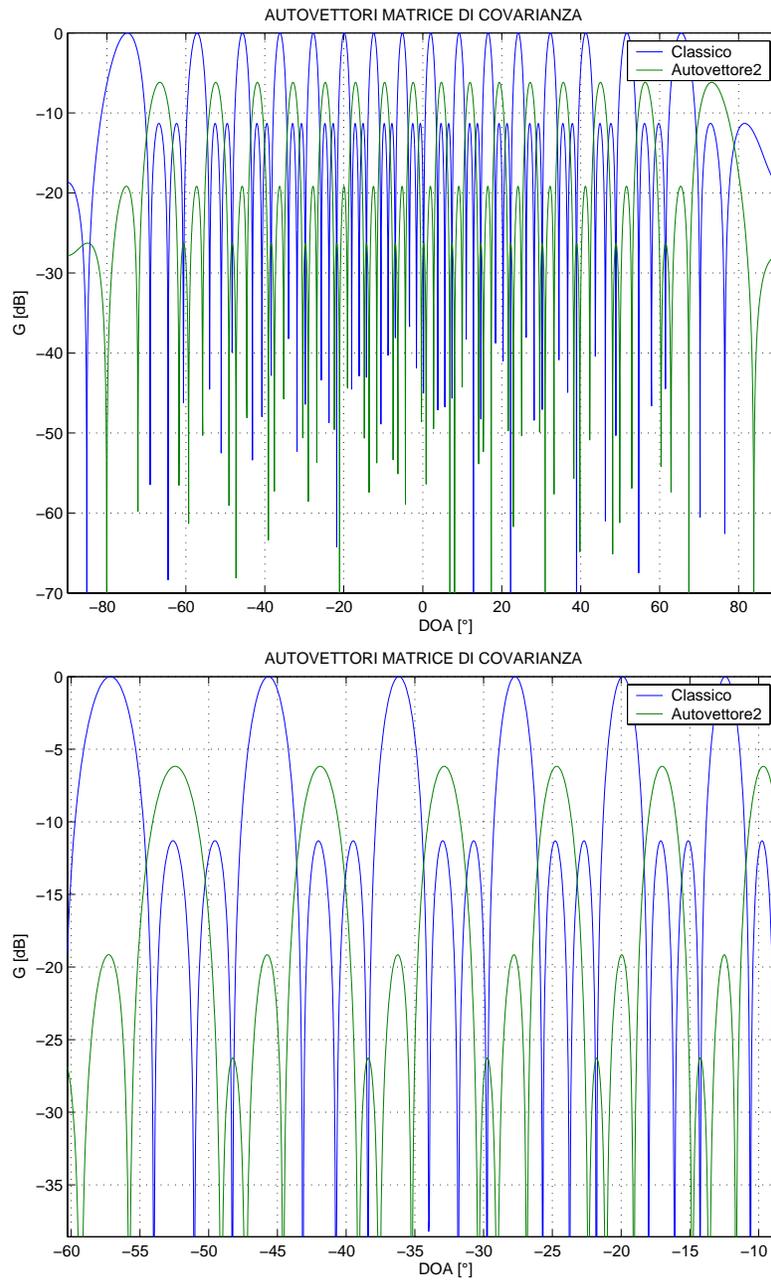


Figura 4.31: Andamento del secondo autovettore dell'Esempio 3 e relativo dettaglio nell'intorno della DOA della RFI secondaria $\theta_1 = -33^\circ$.

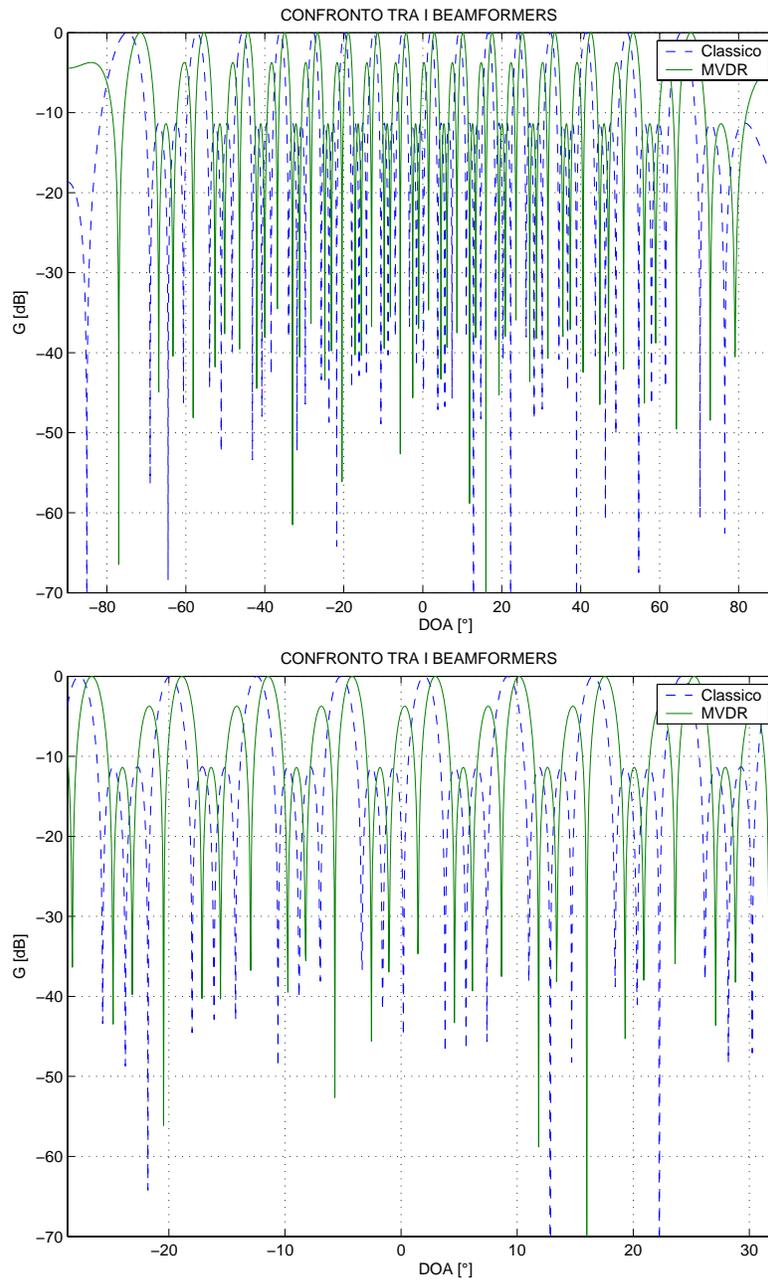


Figura 4.32: Beampattern ottenuto per l'Esempio 4 e relativo dettaglio nella direzione di puntamento $\theta_0 = +2^\circ$. Il beampattern viene distorto da una RFI catturata da un lobo di grating ($\theta_2 = +16^\circ$).

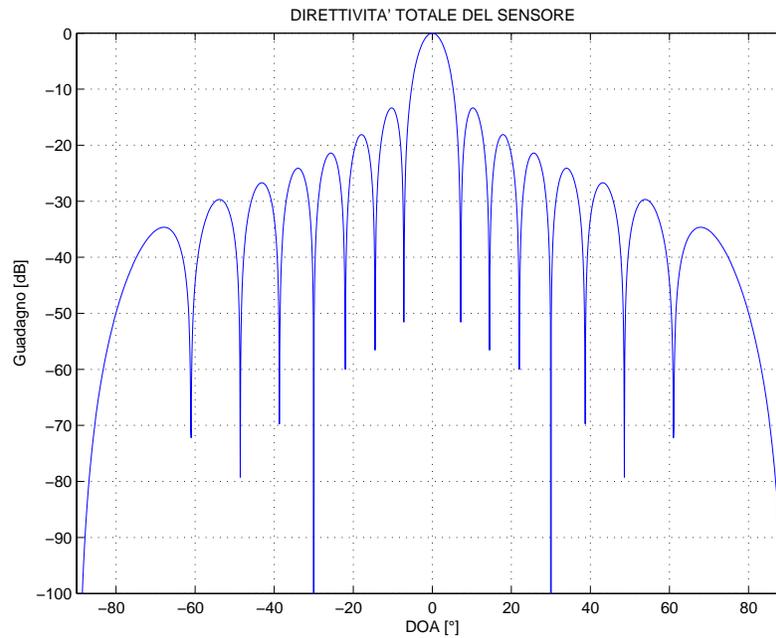


Figura 4.33: Beampattern di un sensore di BEST-1. Il beampattern complessivo si ottiene moltiplicando il beampattern del singolo sensore per il fattore di gruppo dell'array.

Parametro	Valore
Numero sensori	4
Tipo sensore	array di 16 dipoli spazati di $\lambda/2$
Spaziatura sensori	$8\lambda @ f_c/2$
Campioni usati per $\hat{\mathbf{R}}$	200
DOA puntamento	$+2^\circ$
DOA RFI	$+12^\circ - 23^\circ + 30^\circ$
Ampiezze RFI	2 4 6
Frequenze RFI	$0.05f_c$ $0.25f_c$ $0.15f_c$
Varianza rumore naturale σ_n^2	0.001
Varianza rumore artificiale σ_a^2	0.01

Tabella 4.3: Parametri utilizzati nell'Esempio 5.

(Fig. 4.33): l'interferenza cade proprio in prossimità di uno zero *naturale* dell'array e pertanto viene abbattuta.

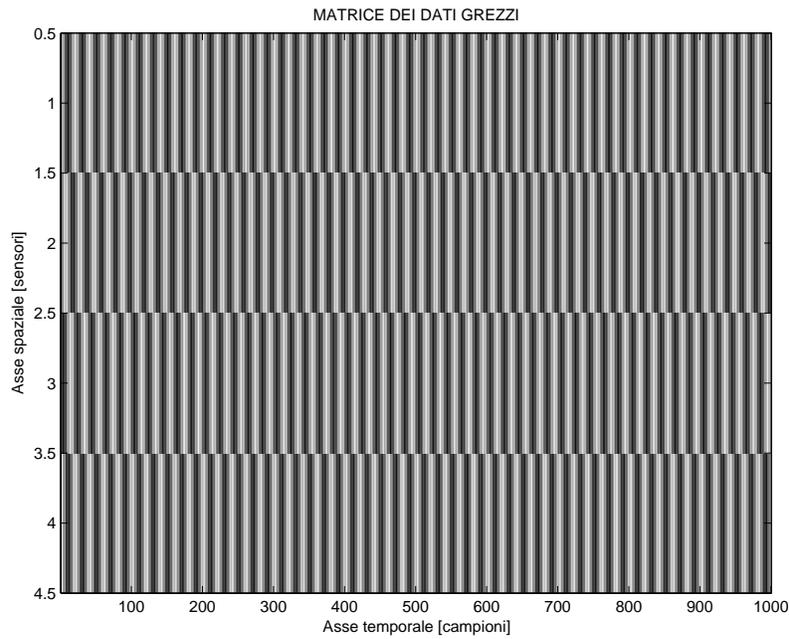


Figura 4.34: Matrice dei dati grezzi per l'Esempio 5 (BEST-1).

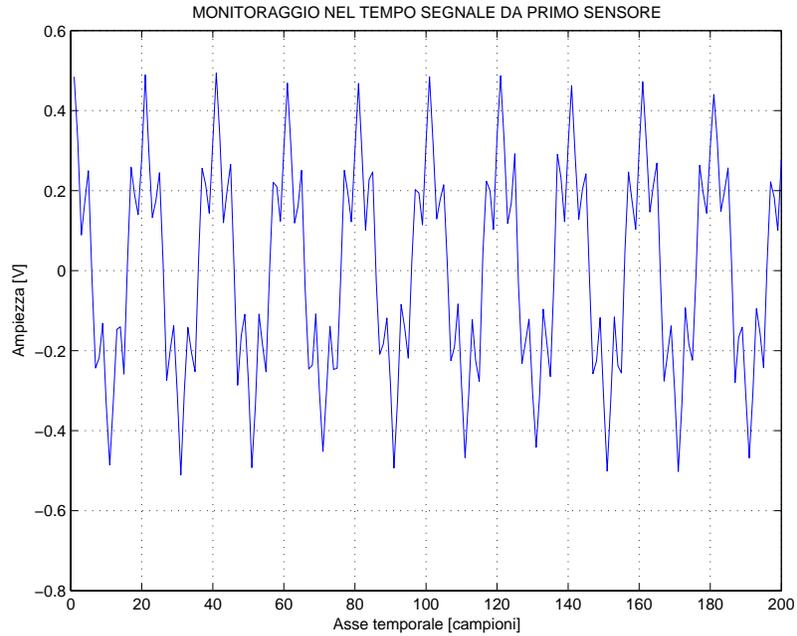


Figura 4.35: Segnale in uscita dal primo sensore (dominio del tempo) per l'Esempio 5 (BEST-1).

È possibile già fare anche un'altra considerazione, sempre osservando la Fig. 4.36. L'interferenza di maggiore intensità non è più la seconda ma la prima. Infatti quest'ultima gode maggiormente del guadagno offerto dal sensore in direzione θ_1 .

Dal calcolo dei coefficienti ottimi risulta il fattore di gruppo riportato in Fig. 4.37, dove viene riportato per confronto anche quello ottenuto mediante beamformer classico. Si osserva il corretto puntamento del beam a $\theta_0 = +2^\circ$, l'allargamento dello stesso ed il posizionamento degli zeri in $\theta_1 = +12^\circ$, $\theta_2 = -23^\circ$ ed in tutte le corrispondenti direzioni spaziali equivocate.

Il beampattern finale che se ne ricava, tenendo conto della direttività dei sensori è quello riportato in Fig. 4.38. In Fig. 4.39 ne viene riportato un dettaglio.

Anche in questo caso è interessante condurre un'analisi SVD della matrice di covarianza. In Fig. 4.40 viene riportato l'andamento degli autovalori di \mathbf{R} . Si hanno solo 2 autovalori di valore elevato perchè la terza RFI è stata abbattuta mentre l'autovettore dominante, per via della direttività dei sensori, punta in corrispondenza di $\theta_1 = +12^\circ$ (Fig. 4.41) e nelle corrispondenti DOA equivocate. Il secondo (Fig. 4.42) punta in corrispondenza di $\theta_2 = -23^\circ$ mentre il terzo (Fig. 4.43), ad ulteriore conferma dell'abbattimento della terza RFI, non risulta puntare a $\theta_3 = +30^\circ$.

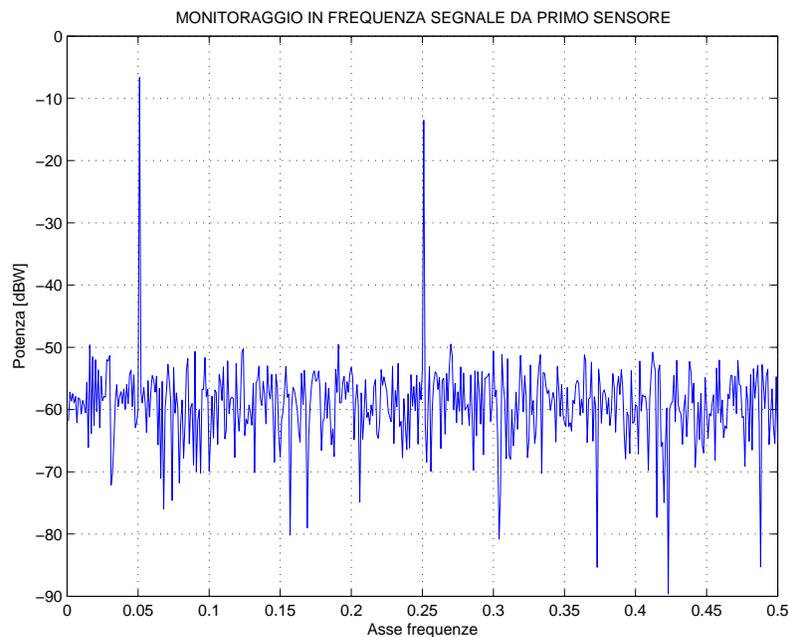


Figura 4.36: Segnale in uscita dal primo sensore (dominio della frequenza) per l'Esempio 5 (BEST-1).

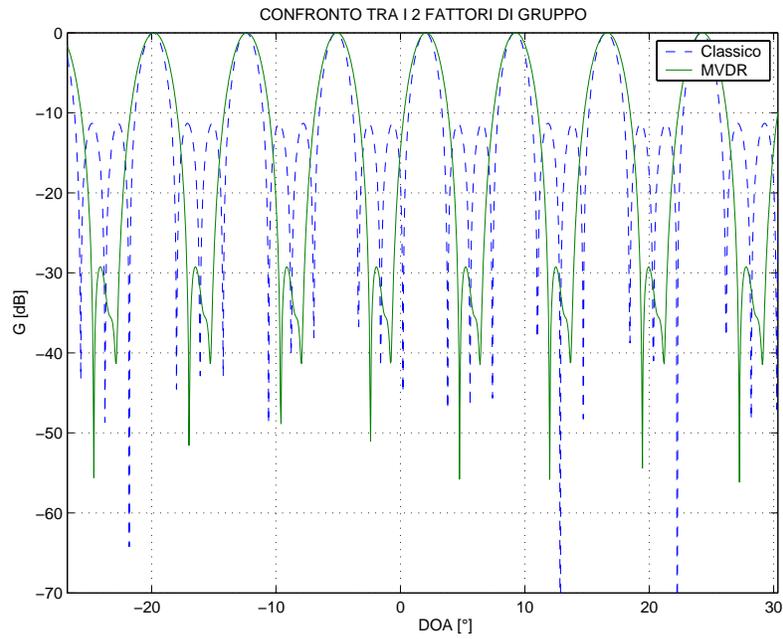


Figura 4.37: Dettaglio del fattore di gruppo per l'Esempio 5 ottenuto mediante algoritmo MVDR adattativo su BEST-1. Per confronto viene riportato anche il fattore di gruppo ottenuto da beamformer classico. Si osserva il corretto puntamento del beam a $\theta_0 = +2^\circ$, l'allargamento dello stesso ed il posizionamento degli zeri in $\theta_1 = +12^\circ$, $\theta_2 = -23^\circ$ ed in tutte le corrispondenti direzioni spaziali equivocate.

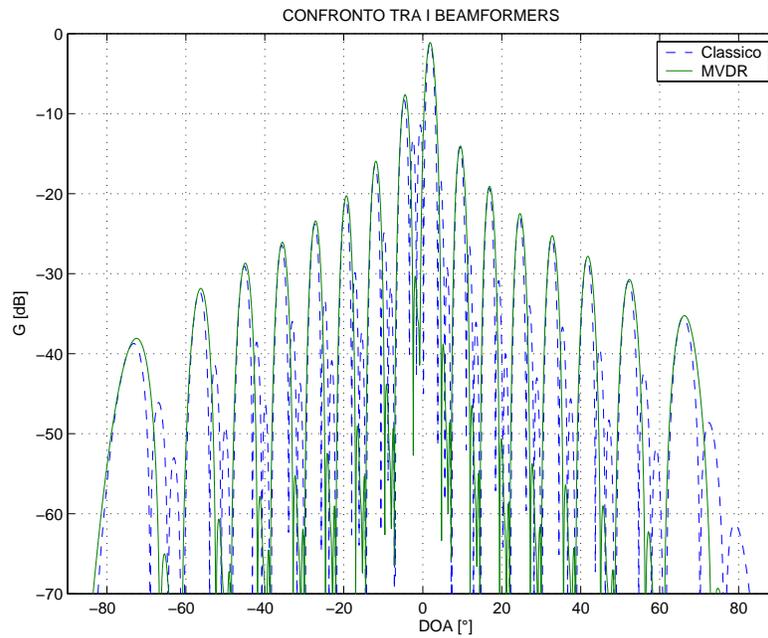


Figura 4.38: Beampattern complessivo per l'Esempio 5 (BEST-1).

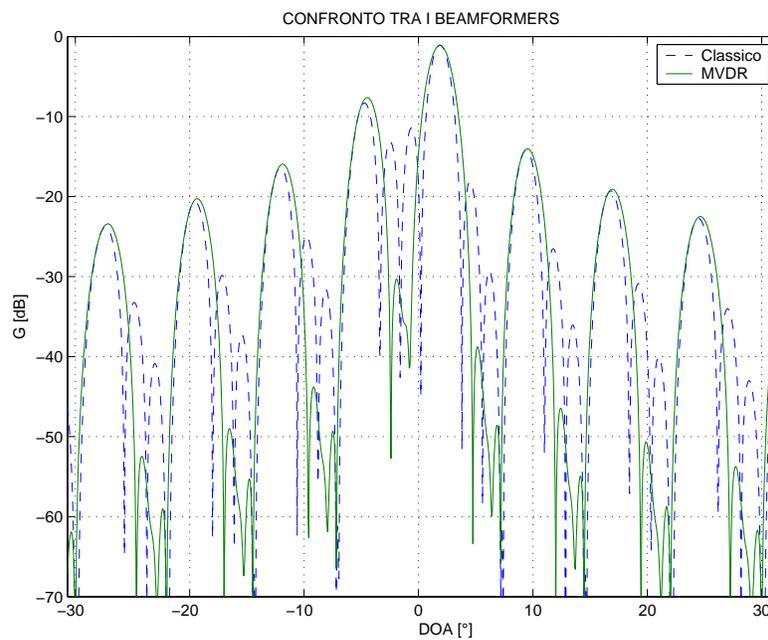


Figura 4.39: Dettaglio del beampattern complessivo per l'Esempio 5 (BEST-1).

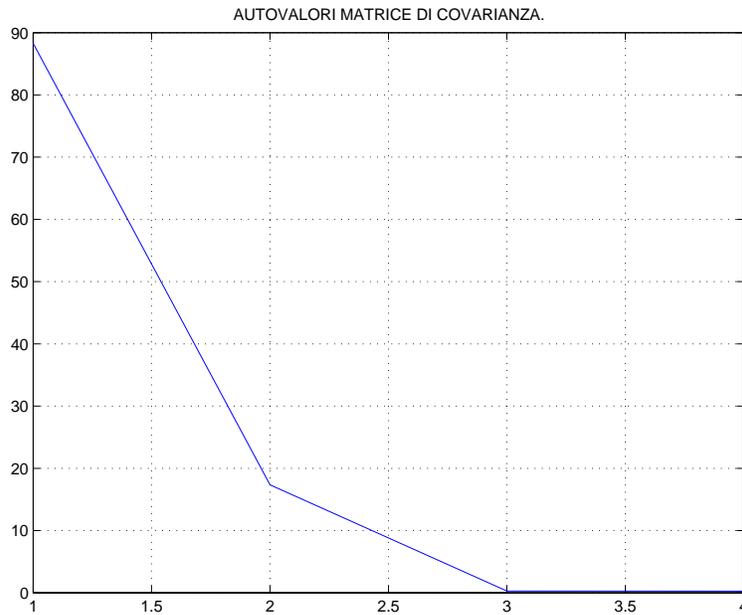


Figura 4.40: Autovalori della matrice di covarianza per l'Esempio 5 (BEST-1). Si hanno solo 2 autovalori di valore elevato sebbene vi siano 3 RFI perchè una è stata abbattuta in modo naturale da uno zero del sensore.

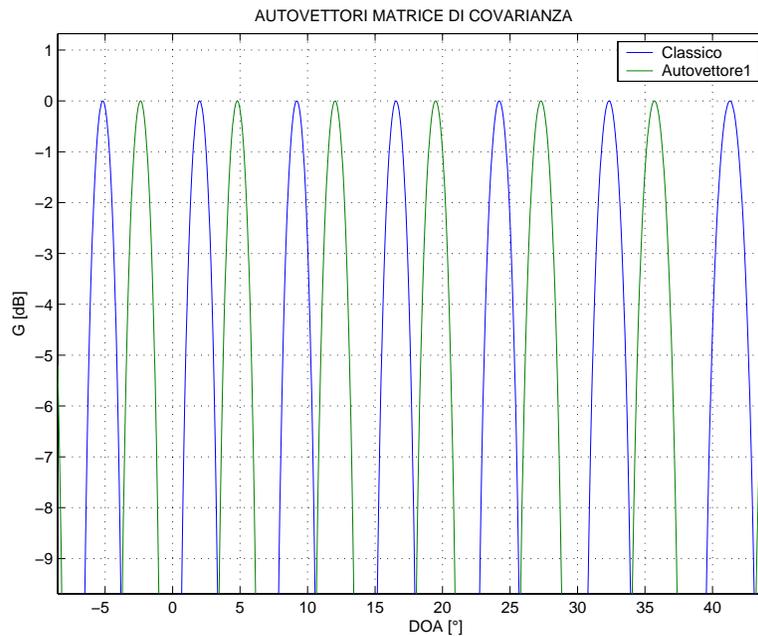


Figura 4.41: Dettaglio dell'autovettore 1 per l'Esempio 5 (BEST-1). Risulta puntare in direzione $\theta_1 = +12^\circ$ e nelle corrispondenti DOA equivoche.

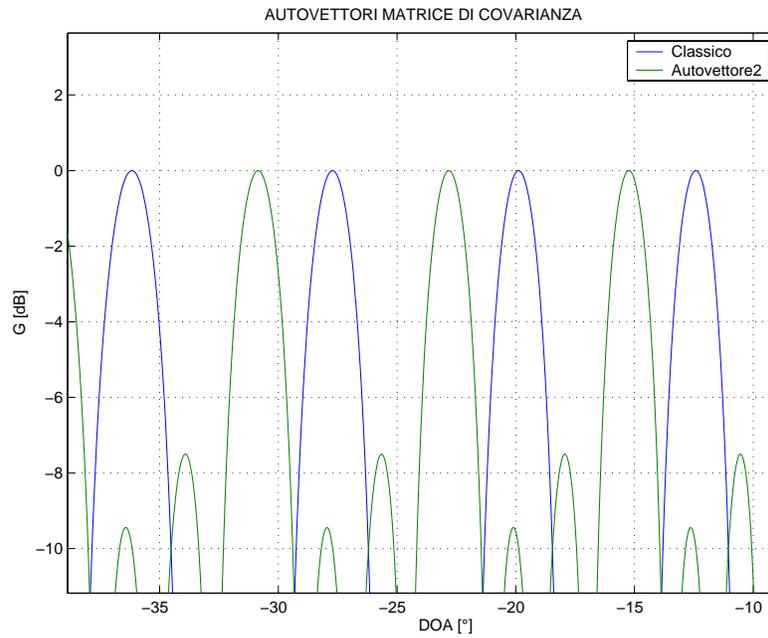


Figura 4.42: Dettaglio dell'autovettore 2 per l'Esempio 5 (BEST-1). Risulta puntare in direzione $\theta_2 = -23^\circ$ e nelle corrispondenti DOA equivoche.

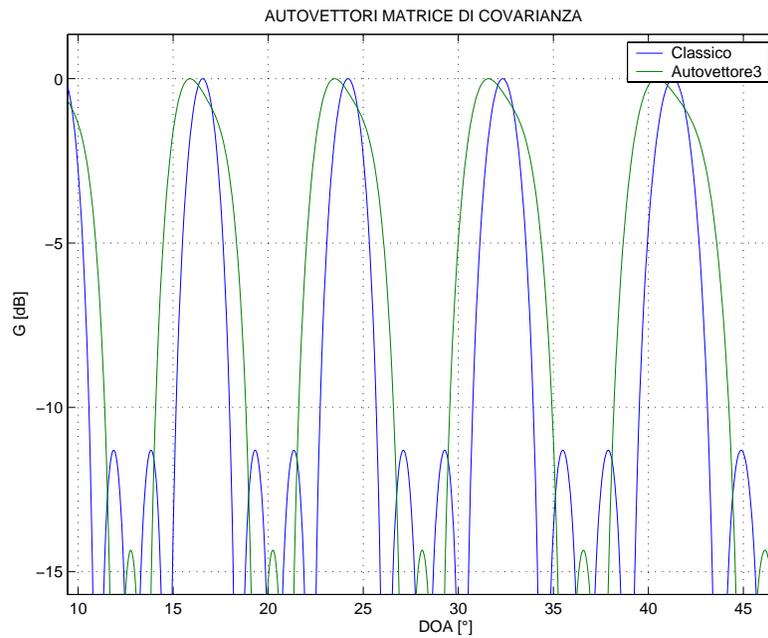


Figura 4.43: Dettaglio dell'autovettore 3 per l'Esempio 5 (BEST-1). Non risulta puntare in direzione $\theta_3 = +30^\circ$ in quanto in tale direzione si ha uno zero naturale del sensore con conseguente abbattimento della terza RFI.

4.4.2 Esempio 6: Interferenze all'interno dei lobi di grating in BEST-1

Quale ultimo caso si consideri quello riportato in Tab. 4.4. In questo esempio un'interferenza risulta provenire da $\theta_2 = +41^\circ$, proprio in corrispondenza di un lobo di grating del fattore di gruppo dell'array¹² (Fig. 4.44). Esattamente come accadeva per l'Esempio 4, anche in questo caso si causa un'eccessiva distorsione del beam (Fig. 4.45) tale da non rendere possibile un'osservazione radioastronomica corretta mediante sole tecniche di filtraggio spaziale.

Parametro	Valore
Numero sensori	4
Tipo sensore	array di 16 dipoli spazati di $\lambda/2$
Spaziatura sensori	$8\lambda @ f_c/2$
Campioni usati per $\hat{\mathbf{R}}$	200
DOA puntamento	$+2^\circ$
DOA RFI	$+12^\circ + 41^\circ$
Ampiezze RFI	2 4
Frequenze RFI	$0.05f_c 0.25f_c$
Varianza rumore naturale σ_n^2	0.001
Varianza rumore artificiale σ_a^2	0.01

Tabella 4.4: Parametri utilizzati nell'Esempio 6.

4.5 RFI Mitigation mediante filtraggio adattativo

Il filtraggio adattativo è una delle aree più promettenti nella disciplina de

4.6 Conclusioni

Nel capitolo precedente si è studiato il beamforming *deterministico*, in cui il beampattern veniva costruito sulla base di un'informazione a priori che inglobava anche conoscenze sulla direzione di provenienza delle RFI. In questo capitolo invece, si è analizzata la possibilità di ricorrere ad algoritmi *adattativi* che ricavassero dinamicamente le DOA in cui andare a posizionare gli zeri. È stata condotta un'approfondita ricerca per capire quale algoritmo potesse essere il più consono ad un uso in ambito radioastronomico e si è visto che il miglior compromesso in termini di costo/prestazioni viene offerto dal MVDR. Nel secondo paragrafo sono stati approfonditi gli aspetti teorici legati alla stima della matrice di covarianza mentre nel terzo paragrafo sono stati illustrati i risultati delle simulazioni condotte su tale algoritmo per saggiarne l'efficacia in diverse condizioni. Infine si è poi studiata l'applicabilità di tale algoritmo al sistema BEST-1 riportando casi emblematici e si è visto

¹²Si tratta di un evento che può capitare tanto più frequentemente quanto maggiore è la spaziatura tra i sensori.

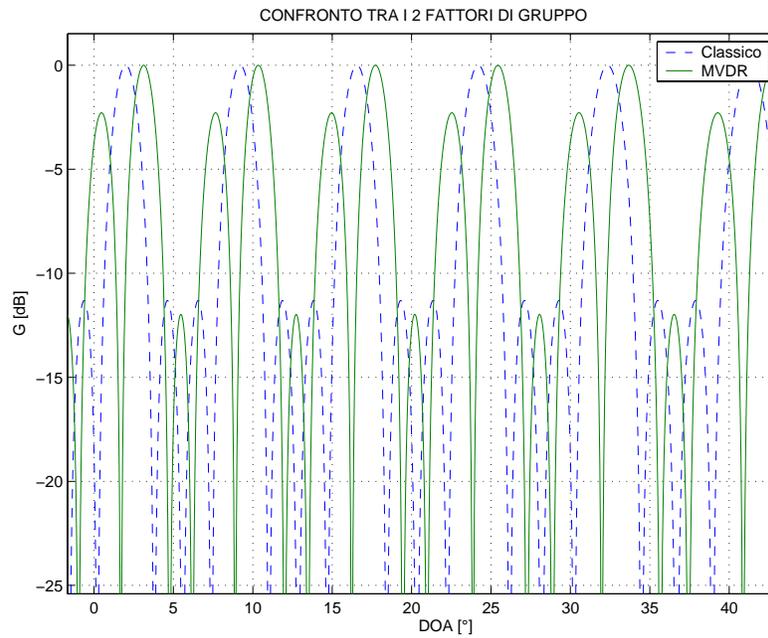


Figura 4.44: Dettaglio del fattore di gruppo per l'Esempio 6 (BEST-1). La seconda RFI proveniente da $\theta_2 = +41^\circ$ cade in lobo di grating. Il MVDR pone uno zero in corrispondenza di θ_2 ma questo viene replicato anche nel main beam ($\theta_0 = +2^\circ$) che di conseguenza viene fortemente distorto.

che le limitazioni maggiori verrebbero imposte dalla presenza dei lobi di grating e all'equivocazione spaziale. In ogni caso risulta estremamente complicato tenere conto nelle simulazioni dei complessi meccanismi che regolano la realtà e per tale motivo un giudizio attendibile delle prestazioni ottenibili da tale algoritmo può essere fornito solo da misure reali.

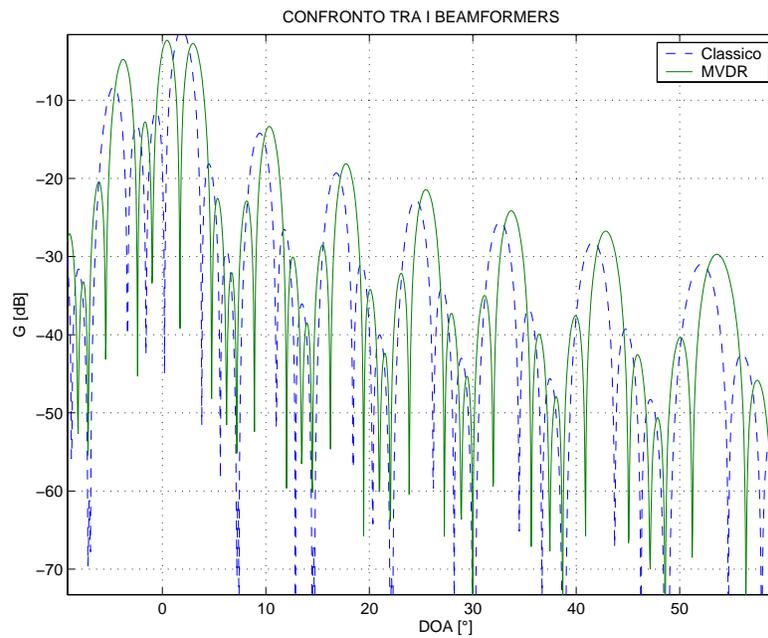


Figura 4.45: Dettaglio del beampattern per l'Esempio 6 (BEST-1). Si osserva l'eccessiva distorsione del beam a $\theta_0 = +2^\circ$ dovuta al posizionamento di uno zero in corrispondenza di un lobo di grating a $\theta_2 = +41^\circ$.

Capitolo 5

MSC Beamforming con BEST-1

Nel Cap. 2 si è visto che i beamformers ad ottimo statistico possono essere resi *adattativi*, effettuando periodicamente una stima dei parametri statistici dei segnali in gioco, sulla base delle sequenze temporali prodotte nel processo di campionamento (vedi algoritmi LMS e RLS, paragrafo 2.5). Dalla Tab. 2.5, si deduce che al momento gli algoritmi candidati al beamforming *adattativo* risultano essere il *Multiple Sidelobe Canceller (MSC)*, paragrafo 2.4.1), ed il *Linearly Constrained Minimum Variance (LCMV)*, paragrafo 2.4.4). In questo capitolo e nel successivo si studierà l'applicabilità di tali algoritmi al sistema BEST-1.

5.1 Descrizione del sistema SENTINEL 2

Presso l'Istituto di RadioAstronomia, è attivo dal 2002 un sistema per il monitoraggio automatico delle RFI e la tutela delle bande di osservazione radioastronomiche, denominato SENTINEL 2 (vedi Fig. 5.1). Il sistema si compone di 6 antenne log-periodiche a larga banda (da $300MHz$ a $2GHz$ con un'apertura di fascio HPBW sempre maggiore di 60°) disposte a raggiera su una torre alta $22m$ e polarizzate a 45° ¹. Le antenne sono collegate ad un commutatore RF allo stato solido controllato da un software che ciclicamente le collega una per volta, per un tempo arbitrario, ad uno stadio LNA che provvede ad amplificare il debole segnale ricevuto. Il segnale, così preamplificato, viene portato all'ingresso di un analizzatore di spettro programmabile HP8562A utilizzato impropriamente come ricevitore sintonizzabile, che consente all'operatore di avere un quadro istantaneo dello scenario delle RFI, in una data direzione. Ogni $210ms$ il sistema effettua una scansione completa delle direzioni spaziali e, a passi di $20MHz$, riporta ad una sua uscita ausiliaria la sottobanda osservata, convertita alla frequenza di $310.7MHz$ ². Il segnale in uscita dall'analizzatore viene traslato in banda base e poi campionato. I dati vengono acquisiti da un software che provvede ad effettuare un'analisi di spettro per ottenere un canale da $10 \dots 100kHz$ per poi registrare e catalogare (per giorno, ora, frequenza

¹Questa polarizzazione *obliqua* causa una perdita di $3dB$ sui segnali a polarizzazione verticale od orizzontale ma evita il raddoppio del sistema d'antenna.

²È la prima media frequenza dell'HP8562A.

e direzione di osservazione) eventuali RFI captate nelle bande riservate alla radioastronomia. La stima delle DOA ottenuta mediante questo sistema è affetta da un errore notevole, anche per via della polarizzazione obliqua. Ha carattere puramente indicativo per l'operatore, affinché egli possa avere un'idea su dove iniziare la procedura di *direction finding*, mediante unità mobile appositamente attrezzata.

È possibile sfruttare questo sistema (o parte di esso) per la mitigazione delle RFI? Secondo quanto è stato detto nel Cap. 2, a prima vista questo sistema sembra proprio costituire il canale ausiliario richiesto per la tecnica MSC. Per questo motivo, in questo capitolo, si studierà in modo più approfondito la tecnica MSC, per capire quanto effettivamente questa possa essere implementata nell'ambito del progetto BEST-1.

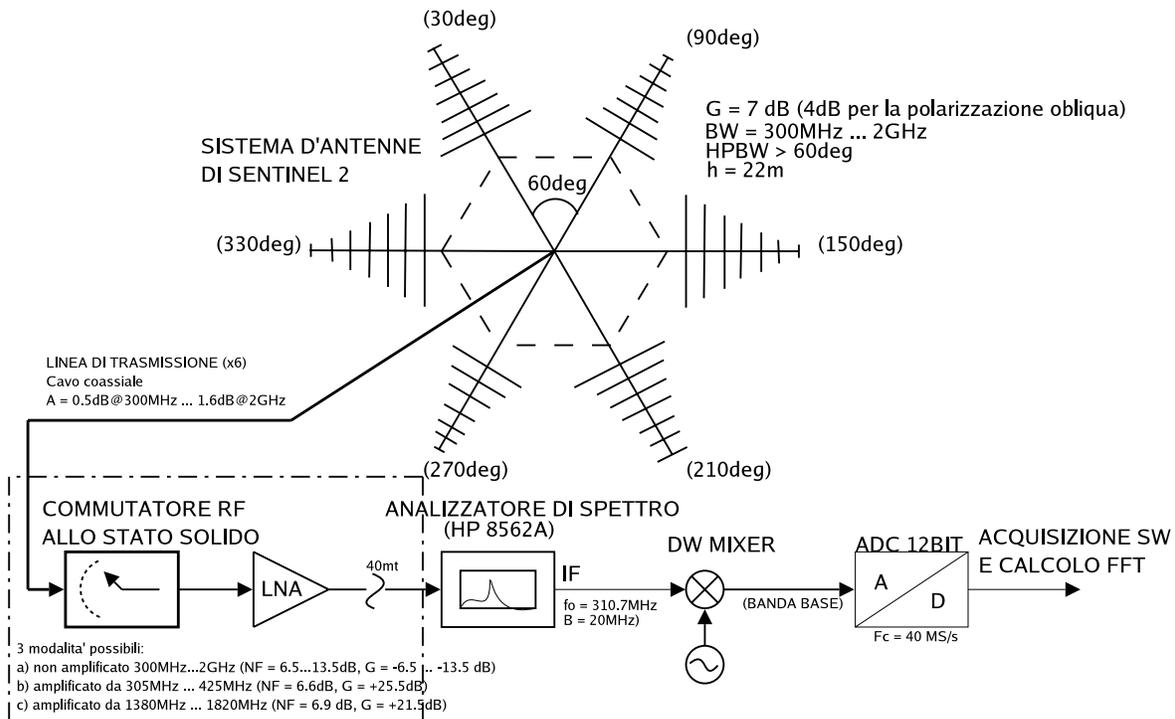


Figura 5.1: Schema a blocchi semplificato del sistema SENTINEL 2.

5.2 MSC beamforming e filtraggio di Wiener

A prima vista, si potrebbe credere che una semplice tecnica di correlazione tra il segnale ricevuto dal radiotelescopio ed il segnale prodotto da un secondo ricevitore (completamente distinto dal primo) puntato in direzione della RFI, possa funzionare bene. Con questo approccio, il segnale ausiliario (segnale di riferimento) verrebbe cross-correlato con il segnale principale e, dopo aver corretto mediante procedura di calibrazione, eventuali differenze di fase nei ricevitori, il segnale ottenuto

verrebbe sottratto da quello principale. Questo metodo funzionerebbe fintanto che i due segnali continuano a vedere lo stesso ritardo *relativo*; se la *differenza di fase relativa* tra l'ingresso dei due sistemi non cambia, la situazione resta stazionaria, ed i coefficienti restano invariati nel tempo di integrazione. Tuttavia, nella realtà, le condizioni cambiano, ed il moto (*slewing*) del telescopio (che deve inseguire lo spostamento apparente della sorgente) o i fenomeni di propagazione (come la riflessione ed i cammini multipli) causano delle *divergenze* tra il segnale all'ingresso del sistema principale ed il segnale all'ingresso del sistema di riferimento. In queste condizioni *non stazionarie*, la correzione dei coefficienti deve essere sufficientemente rapida da compensare in tempo reale le fluttuazioni statistiche.

Per il semplice caso di *interferenza stazionaria*, si utilizza un filtro lineare per minimizzare il valore quadratico medio della differenza tra la risposta desiderata e quella effettiva. La soluzione risultante è comunemente nota come *soluzione di Wiener*. Per il caso più realistico di condizioni non stazionarie, la soluzione di Wiener è inadeguata, dal momento che non è adattativa. Per essere efficace, in un ambiente non stazionario, la soluzione di Wiener deve essere aggiornata il più velocemente possibile, rispetto al cambiamento delle condizioni. Un beamformer adattativo, inizialmente trova la soluzione di Wiener e continuamente aggiorna la soluzione usando un algoritmo ricorsivo per *inseguire* le fluttuazioni statistiche, a patto che queste avvengano in tempi sufficientemente lenti.

5.3 MSC beamforming in dettaglio

La cancellazione delle interferenze mediante un filtro adattativo, nel contesto radioastronomico, richiede un'antenna di riferimento (con un guadagno nettamente inferiore a quello dell'antenna principale) che monitori l'RFI. Il filtro adattativo poi, mediante i due segnali *primario* e *riferimento* rimuove l'RFI, lasciando passare il solo segnale astronomico desiderato.

Alcuni esperimenti di questo tipo sono già stati condotti dall'NRAO³ sul radiotelescopio da 43m di diametro di Green Bank⁴, nella banda per la radiodiffusione FM 88 – 108MHz. I test hanno evidenziato risultati molto incoraggianti, con attenuazioni dei forti segnali modulati in FM che raggiungevano ed oltrepassavano i 70dB (limite in realtà dettato dalla precisione degli strumenti di misura utilizzati per le prove).

In Fig. 5.2 viene riportato lo schema di un sistema adattativo per la cancellazione delle interferenze, ad uso radioastronomico. Il radiometro del radiotelescopio (o *canale primario*) riceve sia il segnale astronomico $s(n)$ che entra dal main beam, sia l'interferenza $i_P(n)$ che entra dai lobi secondari. L'ingresso primario è la somma di questi due segnali, $s(n) + i_P(n)$. Un'antenna a basso guadagno viene collegata ad un secondo ricevitore (il *canale di riferimento*), il cui ingresso è costituito dalla sola interferenza $i_R(n)$. L'antenna di riferimento viene puntata verso l'interferente. L'area collettrice dell'antenna di riferimento è di gran lunga inferiore a quella posseduta dal radiotelescopio primario, e quindi il segnale astronomico è da considerarsi praticamente assente nell'ingresso di riferimento. L'interferenza nel canale di riferimento, $i_R(n)$, è correlata in qualche modo (a priori incognito)

³National Radio Astronomy Observatory. Organo statunitense per la ricerca scientifica radioastronomica.

⁴Pocahontas County, West Virginia (79 50' 23.40" W, 38 25' 59.23" N)

con l'interferenza nel canale primario $i_P(n)$, ed il compito del filtro adattativo è stimare questa correlazione in funzione del tempo. L'algoritmo adattativo confronta le soluzioni precedenti con l'informazione corrente ed invia coefficienti aggiornati al filtro. Il filtro usa questi coefficienti per modificare $i_R(n)$ e generare un segnale $y(n)$ quanto più simile all'interferenza nel canale principale $i_P(n)$; $y(n)$ viene poi sottratto dall'ingresso primario per produrre l'uscita di sistema $\epsilon(n)$:

$$\epsilon(n) = s(n) + i_P(n) - y(n) \quad (5.1)$$

Solo a questo punto, $\epsilon(n)$ viene inviato al sistema di acquisizione (o elaborazione) dati del radiotelescopio. Si osservi che non viene richiesta alcuna conoscenza a priori sui segnali $s(n)$, $i_P(n)$, $i_R(n)$ o sulle loro correlazioni.

Il percorso del segnale attraverso il filtro adattativo mostrato in Fig. 5.2 mostra la natura iterativa del sistema. L'algoritmo adattativo trova nuovi coefficienti confrontando $\epsilon(n)$ con $\epsilon(n-1)$ ed usando l'algoritmo LMS per minimizzare la potenza totale. La potenza è il quadrato dell'uscita del sistema:

$$\epsilon^2(n) = s^2(n) + [i_P(n) - y(n)]^2 + 2s(n)[i_P(n) - y(n)] \quad (5.2)$$

Poichè $s(n)$ è incorrelato con l'interferenza nei canali primario ed ausiliario, il doppio prodotto sparisce, e così il valore atteso (mediato nel tempo) all'uscita del sistema vale:

$$E\{\epsilon^2(n)\} = E\{s^2(n)\} + E\{[i_P(n) - y(n)]^2\} \quad (5.3)$$

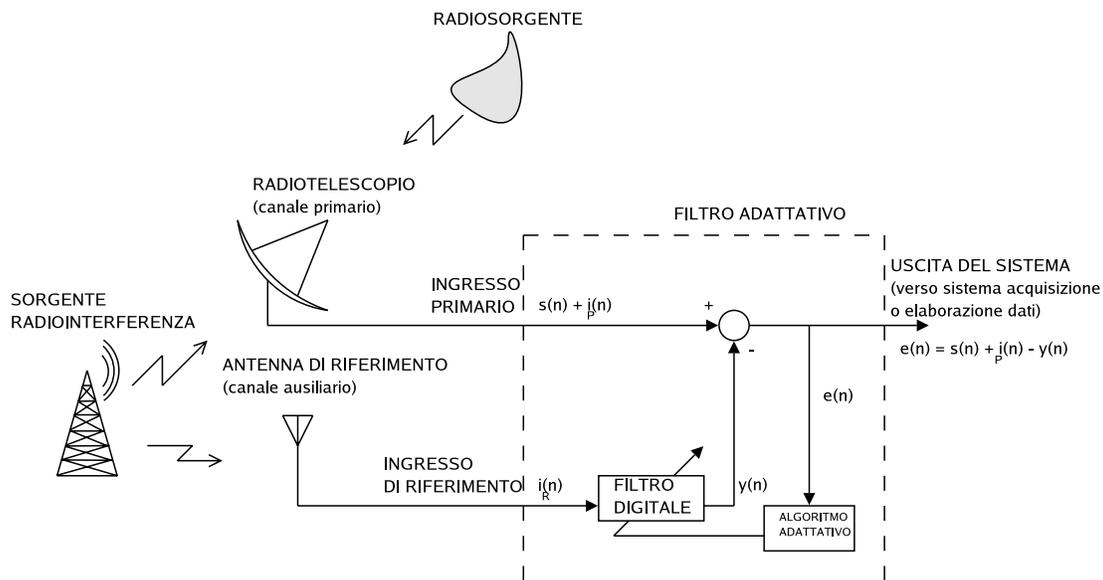


Figura 5.2: Schema di un sistema adattativo per la cancellazione delle RFI, ad uso radioastronomico.

Il processo di correzione dei coefficienti del filtro adattativo, al fine di minimizzare $E\{\epsilon^2(n)\}$, non altera la potenza nel segnale astronomico $E\{s^2(n)\}$, pertanto $E\{[i_P(n) - y(n)]^2\}$ raggiunge un minimo in potenza:

$$E_{min}\{\epsilon^2(n)\} = E\{s^2(n)\} + E_{min}\{[i_P(n) - y(n)]^2\} \quad (5.4)$$

Poichè il segnale astronomico è costante, *la minimizzazione della potenza totale in uscita coincide con la minimizzazione della potenza dell'interferenza all'uscita* e quindi con la massimizzazione del rapporto segnale/interferenza.

In un ambiente stazionario, una volta che il filtro ha determinato i coefficienti tali che $y(n)$ sia la miglior stima ai minimi quadrati dell'interferenza nel canale primario, quei coefficienti restano fissati. Più precisamente, *se anche il segnale interferente avesse una banda non nulla, dovuta alla modulazione, fintanto che la statistica della forma d'onda (cioè media, varianza ed autocorrelazione) resta la stessa nei canali primario e di riferimento, i coefficienti trovati inizialmente continuano ad essere i coefficienti ottimi.* Tuttavia, in condizioni più realistiche, con un radiotelescopio, i coefficienti diventano presto obsoleti se gli effetti della propagazione causano un cambiamento *relativo* in ciò che vedono il canale primario ed il canale di riferimento. Cambiamenti relativi significativi che richiedono l'aggiornamento dei coefficienti possono essere dovuti alla riflessione, alla dispersione o al ripuntamento del telescopio (*slewing*); la scala temporale di questi effetti è dell'ordine delle centinaia di millisecondi. In uno schema adattativo i coefficienti usati per pesare $i_R(n)$ vengono pertanto aggiornati periodicamente.

Si hanno due casi estremi particolarmente interessanti: il primo, se l'ingresso del riferimento è *perfettamente correlato* con l'interferenza nel canale primario. In tal caso, il segnale d'uscita sarà completamente libero dalle interferenze, poichè

$$E\{[i_P(n) - y(n)]^2\} = 0 \quad (5.5)$$

Il secondo, se il canale di riferimento è completamente *incorrelato* con l'interferenza nel canale primario (ad esempio, se per qualche ragione l'RFI non dovesse comparire nel canale primario). In questo caso $E_{min}\{y^2(n)\}$ si annullerebbe; l'equazione 5.3 diverrebbe:

$$E\{\epsilon^2(n)\} = E\{s(n)^2\} \quad (5.6)$$

ed il filtro si spegnerebbe (in pratica i coefficienti si annullerebbero).

Riassumendo, in uno schema adattativo per la cancellazione delle interferenze, l'uscita del sistema va a retroazionare il filtro adattativo e quindi il filtro adattativo si corregge per minimizzare la potenza totale in uscita dal sistema, aggiornando i coefficienti. Il vantaggio di questo sistema è che funziona in condizioni non stazionarie, cioè quando la *differenza relativa* delle caratteristiche delle RFI nel canale primario e nel canale di riferimento varia nel tempo.

5.3.1 Funzione di trasferimento ottima

Dal momento che $i_R(n)$ non è la copia esatta di $i_P(n)$, il segnale $i_R(n)$ viene elaborato con un filtro a coefficienti variabili $w(n)$ in modo che $y(n)$ risulti essere una replica quanto più fedele di $i_P(n)$. Lo schema del filtro viene mostrato in Fig. 5.3; esso viene realizzato (in forma hardware o software) mediante una linea di ritardo *fessurata* (le fessure costituiscono le *prese* del filtro) posta nel canale di riferimento ed un combinatore lineare.

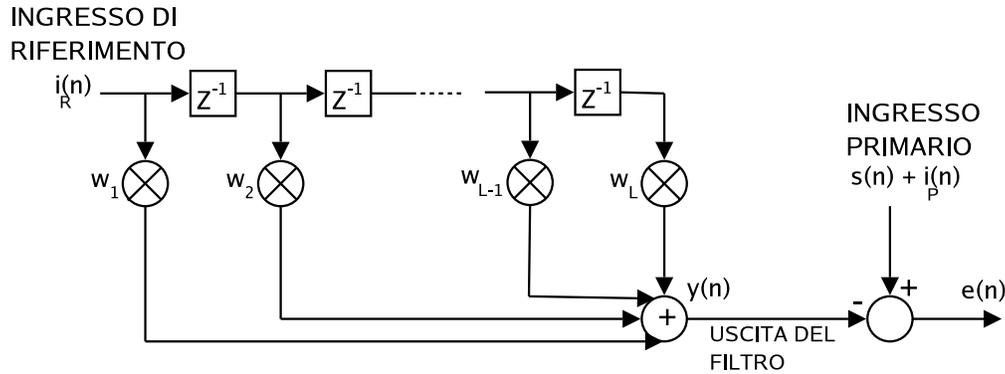


Figura 5.3: Schema del filtro utilizzato per la cancellazione delle RFI con metodo MSC.

Tale linea costituisce un filtro FIR, con caratteristiche di incondizionata stabilità. I segnali alle prese, moltiplicati per opportuni coefficienti, vengono sommati per formare l'uscita $y(n)$. Infine $y(n)$ viene sottratta dal canale primario per formare l'uscita del combinatore $\epsilon(n)$. Come descritto dall'equazione 5.1, $\epsilon(n)$ è la differenza tra l'uscita primaria e l'uscita elaborata del canale di riferimento. Si osservi che *nessun filtraggio viene eseguito sul canale primario*.

In analogia con l'equazione 5.1, sia $\mathbf{i}(n)$ il vettore delle versioni ritardate di $i_R(k)$ e $\mathbf{w}(n)$ il vettore che contiene l'insieme dei coefficienti $w(k)$. Allora l'equazione 5.1 diviene

$$\epsilon(n) = [s(n) + i_P(n)] - \mathbf{i}^T(n) \cdot \mathbf{w}(n) \quad (5.7)$$

dove T indica l'operatore di trasposizione. La potenza in uscita è $\epsilon^2(n)$. Il filtro trova $\mathbf{w}(n)$ minimizzando la potenza totale in uscita, cosicchè $E\{\epsilon(n)\}$ può essere considerato anche un indice del corretto funzionamento del sistema; nella teoria dei sistemi di controllo, $\epsilon(n)$ viene anche detto *segnale errore*. $E\{\epsilon^2(n)\}$ è una superficie quadratica, un iperboloidi multidimensionale che ha un unico punto di minimo. In condizioni stazionarie, questo minimo è fisso e descritto dal vettore dei coefficienti ottimi \mathbf{w}_{opt} . I valori di \mathbf{w}_{opt} si trovano annullando la derivata di $E\{\epsilon^2(n)\}$ rispetto ai coefficienti. In caso di processi stazionari, si può dimostrare che vale la seguente relazione

$$\phi_{RP}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} w_{opt,k} \phi_{RR}(n-k) \quad (5.8)$$

dove ϕ_{RR} è l'autocorrelazione del segnale di riferimento e ϕ_{RP} è la funzione di cross-correlazione tra il segnale di riferimento ed il segnale primario. In termini di *trasformata Z*, l'eq. 5.8, diviene:

$$W_{opt}(z) = \Phi_{RP}(z)/\Phi_{RR}(z) \quad (5.9)$$

Questo risultato rappresenta la soluzione di Wiener ideale (infinite prese). Tuttavia, un sistema fisico per essere realizzabile dovrà essere causale e dovrà avere un numero finito di prese. Maggiore sarà il numero di prese, maggiore sarà la verosimiglianza tra la risposta impulsiva effettiva e quella ideale, che si avrebbe con un filtro di lunghezza infinita.

In generale, il numero di prese per un particolare sistema DSP⁵ è un compromesso tra costi e prestazioni.

5.3.2 Adattività mediante LMS nel MSC beamforming

L'algoritmo base usato per trovare il minimo della superficie quadratica d'errore per la soluzione di Wiener è anche usata per trovare il minimo nel caso di un sistema adattativo, con l'aggiunta della complicazione di *inseguire* il minimo mentre si sposta. L'algoritmo LMS usa una stima del gradiente della superficie d'errore che è strettamente legata alla struttura a linea di ritardo di Fig. 5.3 e richiede una minima capacità di calcolo. Ci sono anche altri algoritmi più complessi del LMS, capaci di produrre anche prestazioni migliori in un sistema adattativo (l'RLS, ad esempio). Tuttavia, si prenderà in considerazione l'LMS per via della sua semplicità computazionale.

Come nell'equazione 5.7, $\mathbf{i}(n)$ è il vettore delle versioni ritardate di $i_R(n)$ mentre $\mathbf{w}(n)$ è il vettore contenente i coefficienti $w(n)$ associati alle prese. Per la soluzione di Wiener e per ogni iterazione nel sistema adattativo, il gradiente della superficie d'errore può essere stimata da

$$\nabla \epsilon^2(n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial[\epsilon^2(n)]}{\partial w_0(n)} \\ \frac{\partial[\epsilon^2(n)]}{\partial w_1(n)} \\ \vdots \\ \frac{\partial[\epsilon^2(n)]}{\partial w_L(n)} \end{bmatrix} = 2\epsilon(n) \begin{bmatrix} \frac{\partial[\epsilon(n)]}{\partial w_0(n)} \\ \frac{\partial[\epsilon(n)]}{\partial w_1(n)} \\ \vdots \\ \frac{\partial[\epsilon(n)]}{\partial w_L(n)} \end{bmatrix} = -2\epsilon(n)\mathbf{i}(n) \quad (5.10)$$

⁵Digital Signal Processor. Espressione per identificare un generico sistema hardware o software per l'elaborazione numerica dei segnali.

dove L è il numero dei coefficienti del filtro, che definiscono una direzione nello spazio dell'errore. Iniziando con questa stima del gradiente e usando il metodo del gradiente:

$$\mathbf{w}(n+1) = \mathbf{w}(n) - \mu \nabla \epsilon^2(n) = \mathbf{w}(n) + 2\mu \epsilon(n) \mathbf{i}(n) \quad (5.11)$$

si trova $\mathbf{w}(n+1)$ dato $\mathbf{w}(n)$. Il parametro μ è la costante di guadagno ed è legata alla grandezza del passo nella ricerca del minimo durante l'inseguimento. Più piccolo è il passo, più grande è il tempo richiesto per la ricerca del minimo della superficie d'errore. Questo è particolarmente importante in un filtro adattativo, poichè il tempo di inseguimento deve essere in grado di competere con i rapidi tempi di fluttuazione statistica, cioè con la velocità di spostamento del fondo della superficie. Velocità e stabilità di adattività, così come il rumore nel vettore soluzione dei coefficienti, dipendono da μ . Più è piccolo μ , minore è l'errore in $\mathbf{w}(n)$, ma più grande è il tempo richiesto per la convergenza della soluzione. Un compromesso tra velocità ed errore introdotto può essere fatto scegliendo μ opportunamente. Il vettore dei coefficienti convergerà ad una soluzione ottima quando⁶

$$0 < \mu < \frac{1}{(L+1)E\{i_R^2\}} \quad (5.12)$$

Si noti che il valore ottimo di μ è una funzione della potenza dell'interferenza nel canale di riferimento. Il valore ottimo di μ è un compromesso tra la migliore adattività e tempo di convergenza. Per eventuali banchi di prova conviene predisporre il sistema ad una impostazione manuale di tale parametro.

5.4 MSC adattativo a canali di riferimento multipli: gradi di libertà

In teoria, sebbene finora si sia usato un solo canale di riferimento, se ne può utilizzare un numero qualsiasi per cancellare le interferenze dal canale primario. *Più canali di riferimento sono necessari se ci sono più di un interferente nella banda passante, poichè un singolo canale di riferimento non possiede il numero sufficiente di gradi di libertà per eliminarne più di uno.* Altri gradi di libertà sono richiesti qualora

1. ci siano diversi segnali interferenti *incorrelati* tra loro, nella banda passante e nella stessa direzione (beam);
2. un singolo segnale interferente venga interessato da un forte effetto di propagazione a cammini multipli, al punto da farlo apparire al ricevitore come una molteplicità di segnali;

⁶Per una dimostrazione, si veda ad esempio: Widrow, B., & Stearns, S.D. 1985, Adaptive Signal Processing (Englewood cliffs, NJ: Prentice Hall).

3. la polarizzazione spaziale di un singolo segnale interferente differisca significativamente tra ingresso primario ed ingresso di riferimento.

Con due o più sorgenti di interferenza incorrelate, la sintesi della funzione di trasferimento, e quindi l'insieme di vettori coefficienti ottimi, diventa più complicata. Ulteriori gradi di libertà possono essere raggiunti incrementando il numero di canali di riferimento elaborati dal beamformer a cancellazione. Nel caso di molteplici segnali interferenti nella banda passante e nel fascio d'antenna, prestazioni valide si ottengono quando il numero di canali di riferimento è maggiore o tutt'al più uguale del numero di interferenti. Questo vale anche in condizioni di forte propagazione a cammini multipli, dove i ritardi temporali comportano che la stessa sorgente di interferenza appaia più volte (analogamente alle immagini fantasma su un televisore). Si osservi che non viene strettamente richiesta una corrispondenza uno a uno tra interferenze e canali di riferimento; il filtro adattativo sintetizzerà le singole funzioni di trasferimento come combinazioni lineari dei segnali dei canali di riferimento.

Un'ulteriore grado di libertà è richiesto qualora la polarizzazione spaziale dell'antenna di riferimento differisca da quella del lobo laterale del radiotelescopio, in direzione della sorgente interferente. Se la risposta di polarizzazione dell'antenna primaria e delle antenne di riferimento coincide con quella dell'RFI, non vi sono problemi e non occorre un ulteriore grado di libertà. Tuttavia se c'è una differenza di polarizzazione spaziale tra le antenne di riferimento e l'antenna primaria, una o le altre vedranno un segnale più forte. Se la differenza nell'orientamento dell'antenna fa sì che il rapporto interferenza/rumore nel canale primario sia maggiore del rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento, l'attenuazione dell'RFI all'uscita sarà inferiore a quella ottima. Chiaramente sarebbe poco pratico che una singola antenna di riferimento venga costantemente orientata per adattarsi alla polarizzazione del lobo secondario del radiotelescopio, specialmente quando si muove per inseguire un oggetto. In questi casi, l'aggiunta di una seconda antenna di riferimento che risponda al senso di polarizzazione ortogonale alla prima (antenna di riferimento) dovrebbe essere sufficiente per raggiungere l'attenuazione ottima dell'RFI. La funzione di trasferimento viene poi sintetizzata da una combinazione lineare dei due segnali di riferimento ortogonali.

5.5 Considerazioni pratiche sulla cancellazione adattativa in radioastronomia

La cancellazione adattativa sembra essere un mezzo efficace per l'attenuazione delle radiointerferenze, sia nei sistemi di osservazione single-dish, sia nei sistemi interferometrici. Tuttavia, dagli esperimenti condotti dall'NRAO, risulta che ci sono tre requisiti fondamentali per il sistema e per l'ambiente RFI, perchè la cancellazione adattativa abbia successo:

1. il ricevitore deve sempre operare in regime lineare;
2. il tempo di convergenza per l'adattatività deve essere finito, dell'ordine di pochi secondi;

3. il rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento deve essere maggiore di quello del canale primario.

Infatti, un regime di funzionamento lineare garantisce che l'RFI non sovraccarichi il front-end del ricevitore, dal momento che un'interferenza distorta non può essere rimossa semplicemente mediante un sistema adattativo basato sul filtraggio lineare. Un tempo di convergenza adattativa finito pone dei limiti pratici sul tipo di RFI che possono essere cancellate efficacemente con questo metodo. Segnali della classe ad onda continua, come quelli emessi dalle stazioni di radiodiffusione o trasmessi nei downlink satellitari (indipendentemente dal tipo di modulazione) e segnali di durata moderatamente lunga (maggiore di alcuni secondi) emessi da sistemi di comunicazione privati, possono essere attenuati efficacemente dal momento che il beamformer a cancellazione ha il tempo necessario richiesto per l'individuazione e la mitigazione. Mentre, brevi *bursts* di interferenza, prodotti da sistemi come quelli impiegati nei radar avionici o navali, rendono la cancellazione difficile senza un'elaborazione aggiuntiva che *ricordi* i parametri del filtro acquisiti tra un burst e l'altro. Quindi, segnali con frequency-hopping pseudo-casuale, come quelli emessi da certi sistemi di comunicazione a spettro espanso, non possono essere cancellati semplicemente usando sistemi di questo tipo.

Mantenere un rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento maggiore di quello che si ha nel canale primario pone dei limiti su dove le sorgenti interferenti possono trovarsi, rispetto al main beam del telescopio. Per esempio, se succede che il main beam punti direttamente ad un satellite che produce RFI, sarà impossibile che il rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento risulti maggiore di quello del canale primario, dal momento che il guadagno del main beam del telescopio sarà sempre maggiore del guadagno dell'antenna di riferimento. Al contrario, se sono i lobi secondari che raccolgono l'interferenza, il rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento può essere facilmente maggiore del rapporto interferenza/rumore nel canale primario, poichè il guadagno del telescopio nella direzione dell'interferenza può essere relativamente basso. Si noti che quando la sorgente di interferenza è in movimento (ad esempio un satellite LEO, come quelli impiegati nel sistema *Iridium*), l'antenna di riferimento deve inseguire il satellite nel cielo perchè si mantenga un buon rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento. Infine, nel caso di interferenze provenienti sul radiotelescopio da una sorgente oltre l'orizzonte, le prestazioni del filtro adattativo vengono ridotte al crescere dell'angolo di elevazione del radiotelescopio, ma più grande è il telescopio, maggiore è l'angolo di elevazione massimo tollerabile.

A parte queste restrizioni pratiche, la cancellazione adattativa può fornire prestazioni notevoli, in situazioni in cui si ha a che fare con RFI persistenti che pongono seri problemi alle osservazioni radioastronomiche.

5.6 Sistema SENTINEL 2 ed il MSC beamforming

È dunque possibile sfruttare il sistema SENTINEL 2 o parte di esso nella tecnica MSC beamforming? La tecnica MSC tradizionale prevede un canale di riferimento che monitori l'RFI nello stesso momento in cui il radiotelescopio osserva la radiosorgente (Fig. 5.2) mentre il commutatore allo stato solido collocato a monte dell'LNA per evitare di replicare gli stadi a valle purtroppo rende disponibile una

sola antenna per volta, e non è garantito che quella selezionata punti in direzione della RFI. Se poi le RFI sono molteplici allora il problema è sicuramente di difficile soluzione. Nell'MSC il filtraggio viene effettuato sul canale di riferimento. Pertanto anche un'elaborazione *off-line* risulterebbe inutile, poichè sarebbe comunque il segnale di riferimento che verrebbe a mancare. Una soluzione euristica si potrebbe ottenere sostituendo al commutatore un sommatore a 6 ingressi. In tal caso però si avrebbe un'attenuazione di almeno $7.8dB$ sul tratto RF che causerebbe un peggioramento della figura di rumore complessiva del sistema. Inoltre la dinamica del segnale in uscita potrebbe essere maggiore di quella accettabile dall'LNA con conseguenti distorsioni ed intermodulazioni. Questa soluzione apporterebbe il minimo delle modifiche al sistema attuale, ma non raggiungerebbe ancora tutte le prestazioni che questo metodo sarebbe in grado di fornire, perchè:

1. Non vi sarebbe alcuna garanzia che il sistema d'antenne risulti orientato verso l'RFI;
2. La polarizzazione *obliqua* delle antenne di riferimento, oltre ad introdurre un'ulteriore perdita di $3dB$ sul segnale RF, per quanto è stato detto nel paragrafo precedente, consentirebbe solo parzialmente di raggiungere delle buone prestazioni;
3. Non vi è alcuna garanzia che il rapporto interferenza/rumore nel canale di riferimento risulti maggiore di quello nel canale primario, anzi, è molto probabile che avvenga il contrario.
4. RFI prodotte da sorgenti in movimento (come i satelliti) resterebbero comunque non reiettabili.

Replicare la catena di discesa renderebbe inutilmente costoso il sistema, dal momento che senza puntamento delle antenne di riferimento verso le RFI e senza la giusta polarizzazione non si otterrebbero comunque prestazioni ottimali.

Questo metodo invece, è in grado di fornire ottime prestazioni nell'eliminazione di RFI sistematiche nella banda di osservazione, anche molto intense, che per qualche motivo non possono essere eliminate e con le quali la radioastronomia deve necessariamente *convivere*. In tal caso, la scelta ottimale in termini di prestazioni consisterebbe nell'installazione di due antenne direttive in direzione dell'RFI (una per polarizzazione) e dei corrispondente filtri adattativi.

Il sistema SENTINEL 2 non è dunque immediatamente utilizzabile per applicazioni di MSC beamforming.

5.7 Risultati sperimentali ottenuti con la tecnica MSC

Al fine di provare le capacità del filtraggio MSC nel mitigare gli effetti delle interferenze, è stato allestito un banco di misura sperimentale (Fig. 5.4) in cui il segnale radioastronomico (*canale principale*) è stato prelevato da uno dei 4 canali di BEST-1, mentre il segnale ausiliario (*canale di riferimento*) è stato fornito da un sistema ricevente collegato ad un'antenna omnidirezionale a larga banda, installata sul tetto dell'edificio (Fig. 5.5).

5.7.1 Caso di segnali interferenti assenti

Il primo caso è estremamente semplice e descrive un'osservazione *in banda* a $408 \pm 1MHz$. Si osserva l'assenza di particolari segnali interferenti sia all'interno del canale principale, sia all'interno di quello ausiliario (Fig. 5.6). C'è una leggera differenza di livello tra i due canali, per quanto riguarda il noise interno alla banda di osservazione. Questo è sintomo di una diversità di guadagno e di figura di rumore tra le due catene riceventi. Il rumore fuori banda ha invece lo stesso livello in entrambi i casi ($-10dB$), essendo il rumore di quantizzazione lo stesso per entrambi gli ADC. Il filtro MSC conserva la risposta passa banda del sistema e contribuisce solo ad un leggero innalzamento del rumore esterno alla banda di osservazione (Fig. 5.7). In questo caso la stima dei coefficienti (64) del filtro MSC è stata effettuata ogni 400 campioni di segnale. L'FFT è stata condotta su 2048 punti (finestrati secondo Hanning) ed il periodogramma è stato mediato 3 volte per abbassare la varianza della stima spettrale.

5.7.2 Caso di segnale interferente CW (sintetizzato)

Nel secondo caso, a parità di condizioni del caso precedente, è stato generato localmente un segnale interferente ad onda continua (CW) alla frequenza di $409MHz$ (Fig. 5.8) e trasmesso in etere da una terza antenna a dipolo posta in prossimità del radiotelescopio. Il segnale viene ricevuto con un buon rapporto segnale/rumore in entrambi i canali (circa $30dB$ nel primo e $35dB$ nel secondo) ed è stato convertito in banda base a $+1MHz$ dai DDC. In seguito all'elaborazione dei dati ricevuti, il segnale interferente risulta essere completamente reiettato.



Figura 5.4: Foto del banco di misura utilizzato per condurre le prove di filtraggio MSC.



Figura 5.5: L'antenna omnidirezionale a larga banda utilizzata per ricavare il segnale ausiliario.

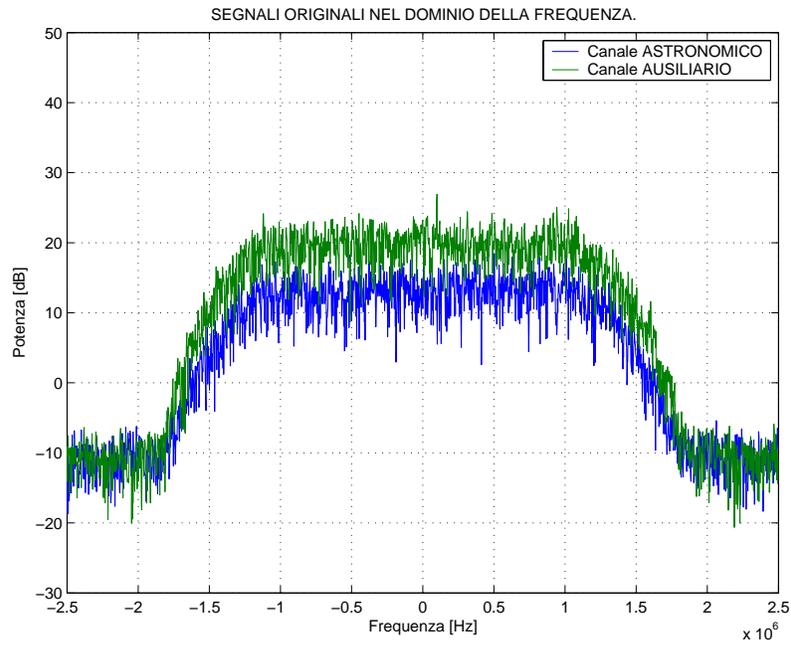


Figura 5.6: Osservazione *in banda* a $408MHz \pm 1MHz$. Non si osservano particolari segnali interferenti.

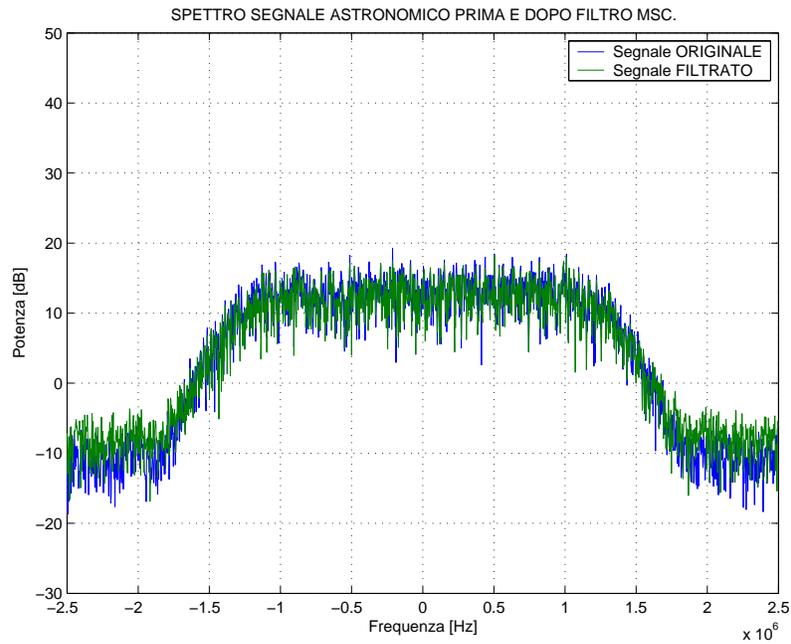


Figura 5.7: Osservazione *in banda* a $408MHz \pm 1MHz$. Spettro del segnale astronomico prima e dopo il filtraggio MSC.

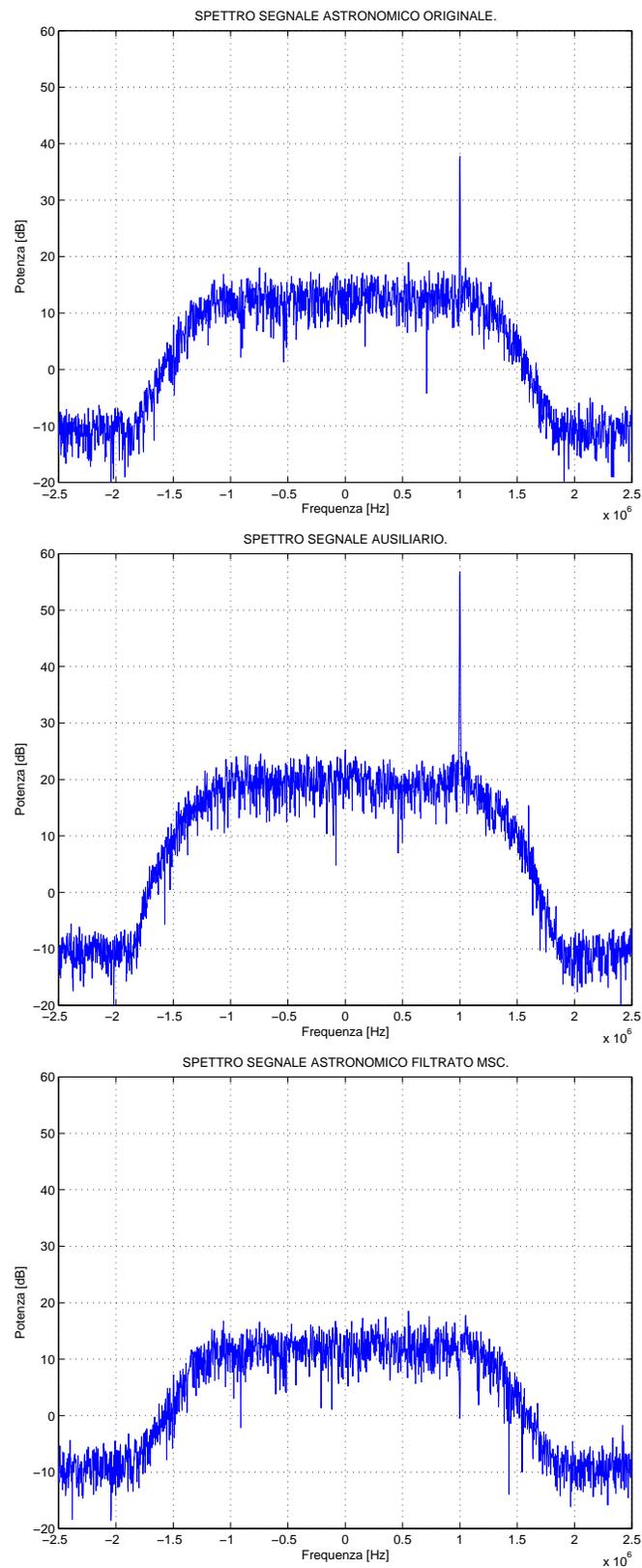


Figura 5.8: Caso di segnale interferente CW (sintetizzato) a 409MHz . L'interferenza è stata reiettata in modo pressochè totale.

5.7.3 Caso di segnale interferente AM (sintetizzato)

Nel terzo caso il segnale interferente è stato modulato in ampiezza (AM) al 50% con un tono a 100KHz . Anche in questo caso l'interferenza è stata attenuata notevolmente (vedi Fig.5.9). Si osserva solo un leggero residuo che può essere eliminato completamente dimezzando a 200 il numero di punti utilizzati per effettuare la stima dei 64 coefficienti del filtro MSC (Fig. 5.10).

5.7.4 Caso di segnale interferente FM (sintetizzato)

In questo caso il segnale interferente è stato modulato in frequenza (FM), anzichè in ampiezza. Si osserva immediatamente (Fig. 5.11) che il filtraggio non avuto successo: l'interferenza è passata pressochè inalterata. Per ottenere prestazioni degne di nota occorre alzare notevolmente la frequenza di aggiornamento dei coefficienti, portando il numero di punti utilizzati per la stima della matrice di covarianza da 400 a 20. Tuttavia, in questo modo, si ha un forte incremento del rumore a larga banda e per tale ragione è stato inserito un filtro passa-banda digitale (FIR), all'uscita del sistema, con una frequenza di taglio di $\pm 1.5\text{MHz}$ (Fig. 5.12).

5.7.5 Reiezione di una portante digitale a 419MHz

In questo caso, e nei successivi, l'interferenza non è stata più generata localmente ma è stata captata dal mondo esterno. Nei casi precedenti l'oscillatore locale era sintonizzato a $408\text{MHz} - 30\text{MHz} = 378\text{MHz}$, mentre per captare un segnale interferente prodotto da terzi è stato necessario *desintonizzare il sistema ricevente* portando, in questo caso, l'oscillatore locale alla frequenza di $419\text{MHz} - 30\text{MHz} = 389\text{MHz}$. In questo modo è stato possibile condurre delle osservazioni *fuori dalle bande riservate alla radioastronomia*. Individuato un segnale di natura digitale, è stato possibile eliminarlo usando 100 campioni per la stima di \mathbf{R} e 32 coefficienti per il filtro MSC (Fig. 5.13). Si osservi che la risposta passa-banda del sistema non è piatta a causa del funzionamento in prossimità dei bordi della banda passante dei filtri inseriti nella catena analogica.

5.7.6 Reiezione di segnali di telemetria a 402MHz

Un'altra banda particolarmente ricca di segnali è quella circostante i 402MHz , dove si hanno diversi segnali di telemetria. Anche in questo caso, per ottenere risultati soddisfacenti è stato necessario aggiornare rapidamente i coefficienti del filtro (1 volta ogni 100 campioni) ed inserire un filtraggio passa-banda all'uscita del sistema digitale per attenuare il rumore a banda larga. L'attenuazione dei segnali interferenti ha raggiunto l'ordine dei 40dB (Fig. 5.14).

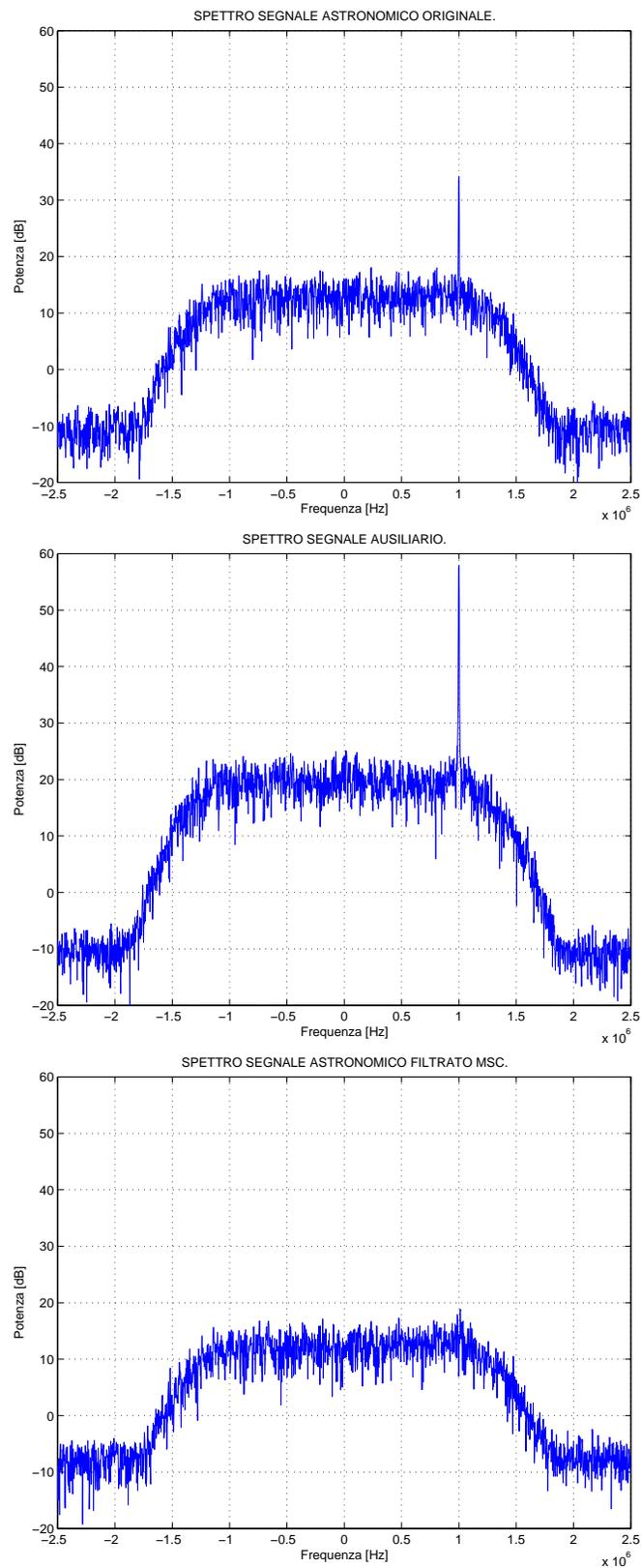


Figura 5.9: Caso di segnale interferente AM (sintetizzato) a $409MHz$. L'interferenza è stata attenuata notevolmente ma si ha ancora un leggero residuo.

5.7.7 Reiezione di un pallone sonda per meteorologia a $406MHz$

L'ultimo caso è sicuramente il più interessante: periodicamente vengono lanciati dagli aeroporti civili e militari palloni sonda meteorologici che operano a circa $406MHz$. Questi, salendo di quota, inviano a terra i dati atmosferici come temperatura, pressione ed umidità. Da diversi anni questi segnali costituiscono una seria fonte di disturbo per la Croce del Nord, che per via dei suoi filtri analogici, non consente una reiezione completa degli stessi. Tali segnali entrano nella catena a media frequenza, raggiungono gli stadi rivelatori dove finiscono per essere sommati in potenza al segnale radioastronomico, rendendo così impossibile condurre correttamente le osservazioni. Il problema può essere risolto eseguendo un filtraggio passa-banda *digitale* in aggiunta al filtraggio analogico attualmente adottato, ma qualora si desiderasse estendere la banda di osservazione, questo tipo di interferenza costituirebbe il primo ostacolo da superare; ecco che in questo caso il filtraggio digitale MSC sembra offrire una valida soluzione al problema (Fig. 5.15).

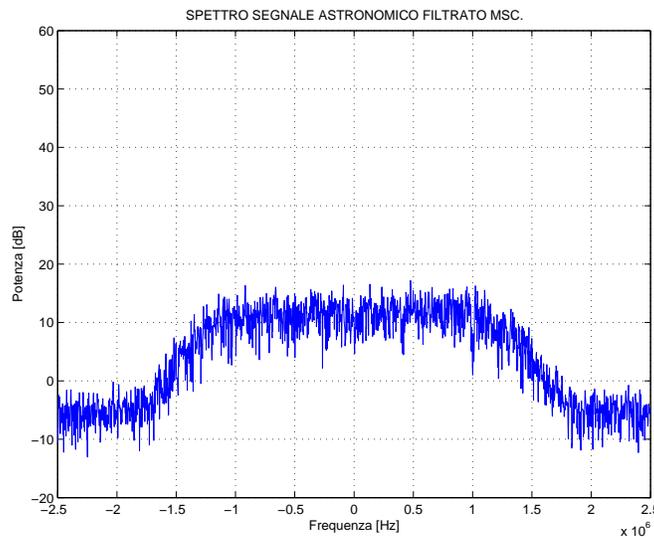


Figura 5.10: Per eliminare completamente ogni residuo del segnale interferente AM (sintetizzato) a $409MHz$ è stato sufficiente dimezzare a 200 il numero di punti utilizzati per la stima dei 64 coefficienti del filtro MSC.

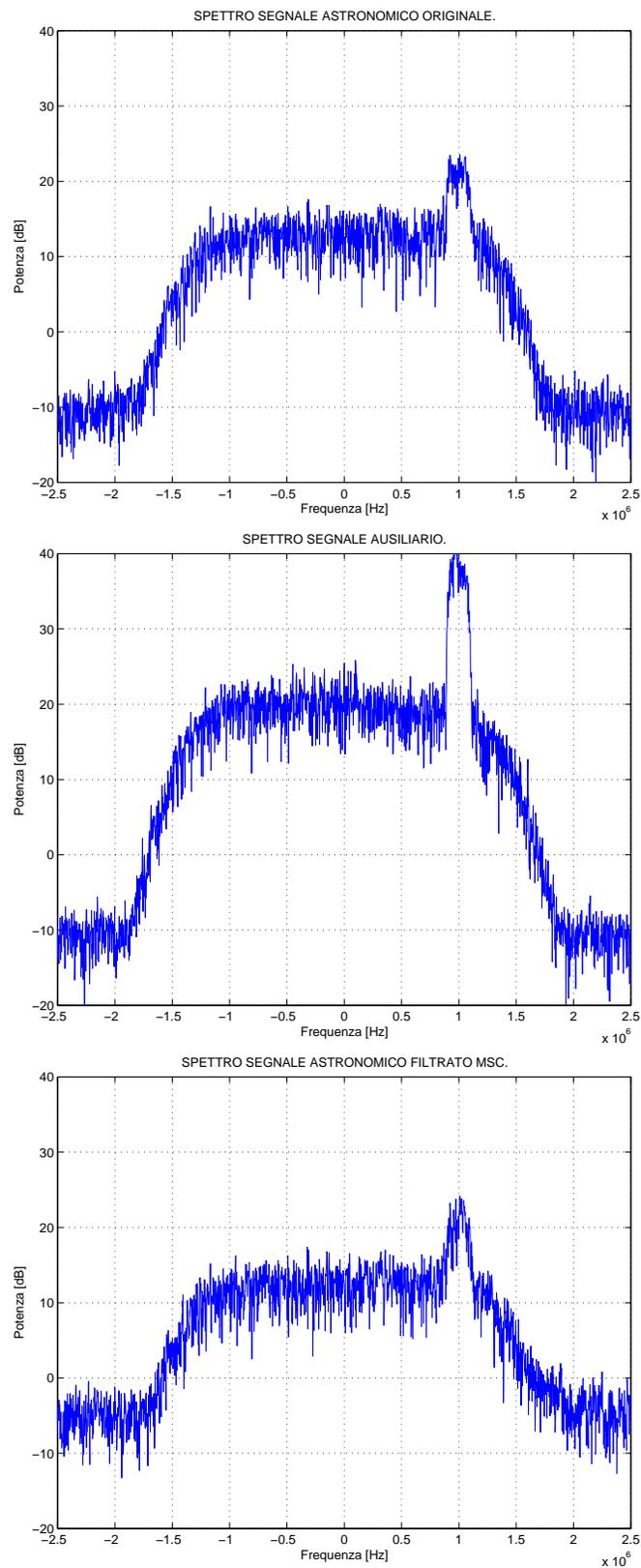


Figura 5.11: Caso di segnale interferente FM (sintetizzato) a 409MHz . Il filtraggio non ha avuto successo: l'interferenza è passata pressochè inalterata.

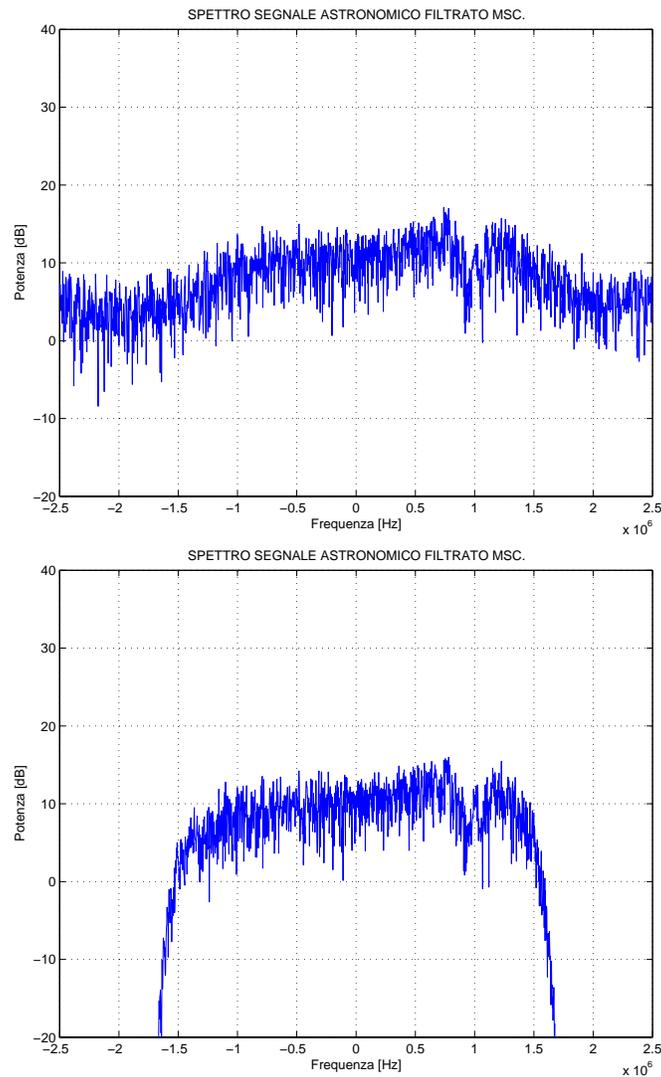


Figura 5.12: Per ottenere delle buone prestazioni, occorre alzare notevolmente la frequenza di aggiornamento dei coefficienti, portando il numero di punti utilizzati per la stima della matrice di covarianza da 400 a 20. Tuttavia, in questo modo, si ha un forte incremento del rumore a larga banda. Per tale ragione è stato inserito un filtro passa-banda digitale (FIR) con frequenza di taglio a $\pm 1.5 MHz$.

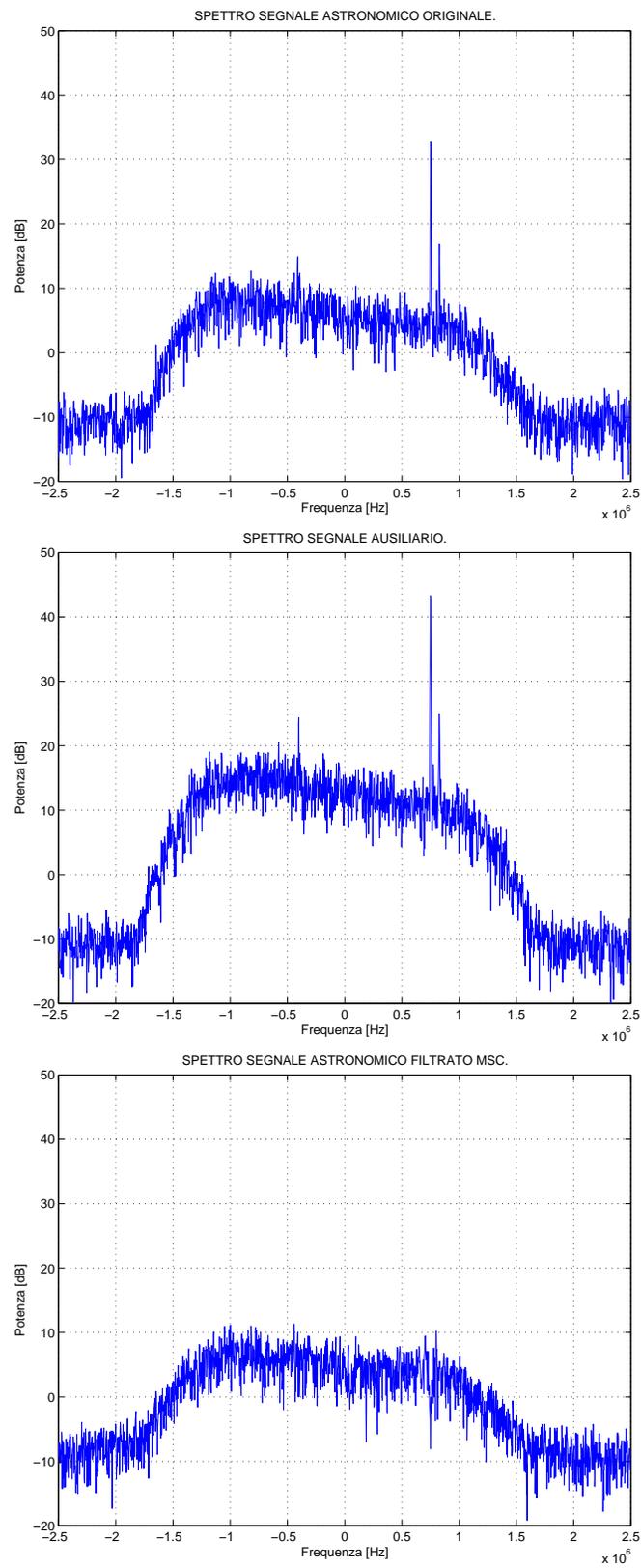


Figura 5.13: Caso di segnale interferente di natura digitale, captato a $419MHz$.

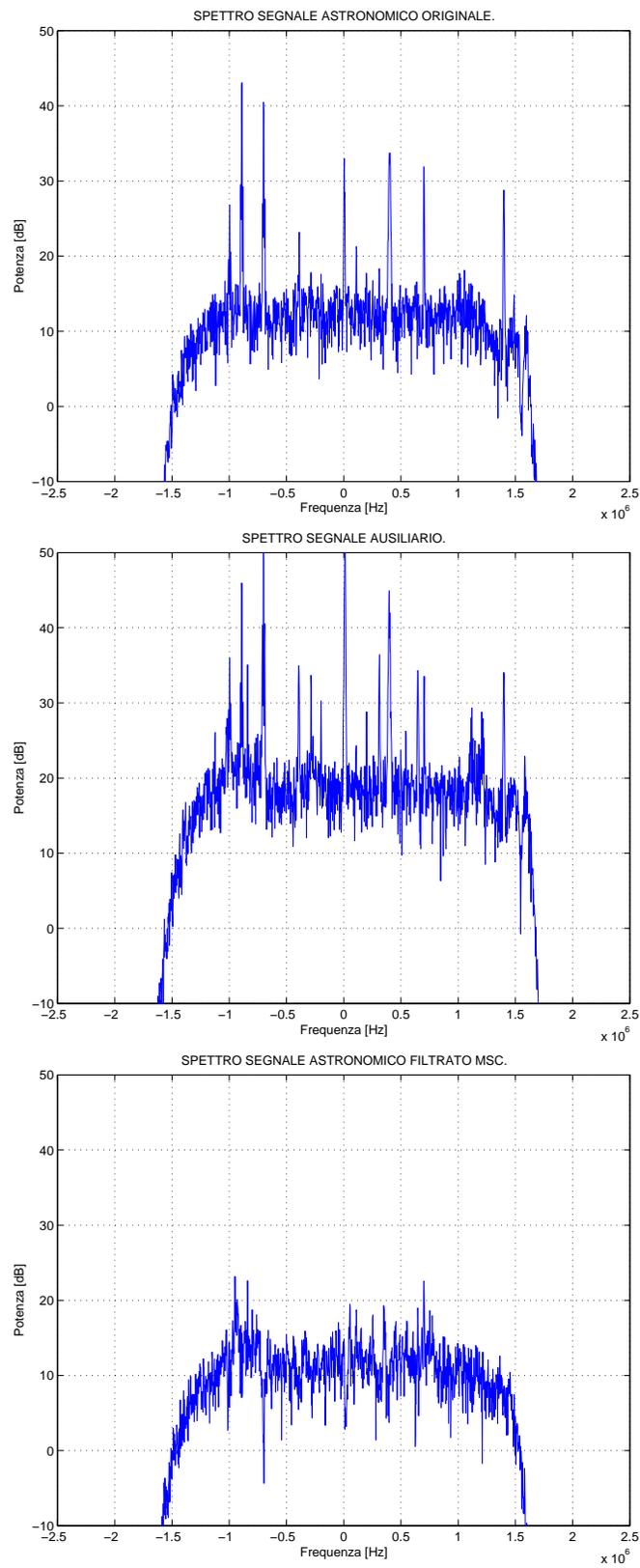


Figura 5.14: La banda dei 402MHz è particolarmente ricca di segnali di telemetria. Per questi segnali è stata raggiunta un'attenuazione di circa 40dB .

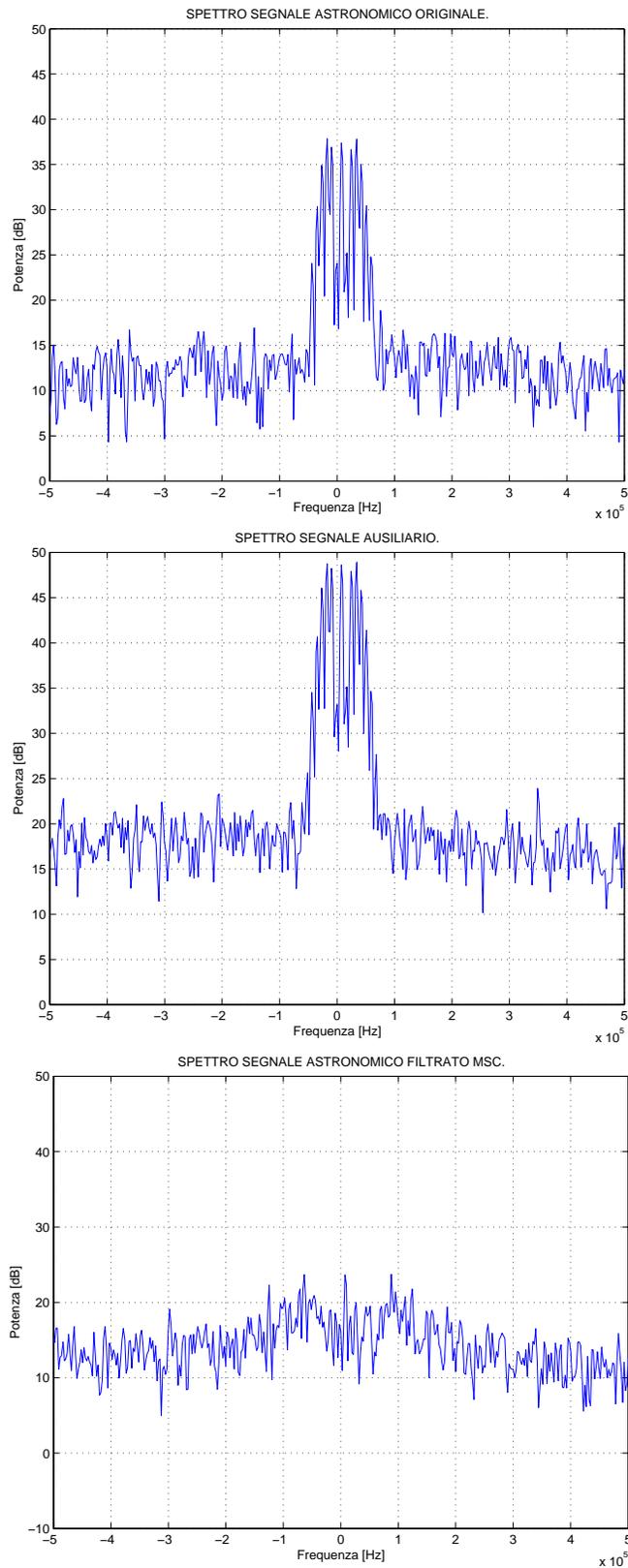


Figura 5.15: Segnale prodotto da un pallone sonda meteorologica a 406MHz che da diverso tempo interferisce con le osservazioni radioastronomiche della Croce del Nord. In questo caso per il filtraggio MSC sono stati utilizzati 32 coefficienti che venivano aggiornati ogni 100 campioni di segnale.

Capitolo 6

RFI Mitigation

6.1 Introduzione

La radioastronomia utilizza lo spettro delle radiofrequenze per rilevare le deboli emissioni prodotte dalle sorgenti celesti. Le frequenze alle quali tali emissioni possono essere percepite sono completamente determinate dai processi fisici che avvengono al sito di origine, sebbene l'intero spettro elettromagnetico contenga informazioni sulla fisica delle sorgenti celesti. I miglioramenti apportati alle antenne ed ai ricevitori radioastronomici mirano ad abbassare i livelli di rilevabilità per tutte le frequenze disponibili. Tuttavia, la sensibilità effettiva dei radiotelescopi viene spesso limitata da radioemissioni prodotte dall'uomo (emissioni *man-made*), dovute ad una varietà di sue attività e sistemi, quali ad esempio la radiodiffusione, i radar, gli impianti di radiocomunicazione e di radiolocalizzazione. In pratica, l'ambiente elettromagnetico nei pressi dei radiotelescopi sta deteriorando sempre più al progredire della tecnologia. Di conseguenza, gli sforzi mirati a migliorare le prestazioni delle stazioni radioastronomiche non sempre producono i risultati attesi, proprio a causa delle interferenze di natura artificiale. Raggiungere le prestazioni (in termini di sensibilità) dei radiotelescopi situati nelle località desertiche, lontano dall'attività umana, resta ancora un'impresa difficile.

I segnali di interesse ricevuti dai radiotelescopi sono estremamente deboli: il rapporto segnale/rumore tipico è generalmente inferiore o pari a $-30dB$ e può raggiungere anche $-60dB$. In conseguenza della loro spiccata sensibilità, i radiotelescopi sono particolarmente vulnerabili anche nei confronti dei segnali prodotti da trasmettitori in bande adiacenti. L'influenza delle RFI sulle misure radioastronomiche va da una distruzione totale dell'informazione utile (per saturazione del ricevitore) ad alterazioni estremamente sottili dei dati. Mentre le RFI a banda larga innalzano il livello di rumore complessivo di sistema (degradando perciò la sua sensibilità) le RFI a banda stretta possono essere scambiate per righe spettrali. In presenza di deboli segnali interferenti, la degradazione dei dati è rilevabile solo dopo notevoli elaborazioni *off-line*, aumentando pertanto il rischio di false osservazioni.

Inoltre, gli astronomi sono spesso interessati anche a regioni dello spettro radio che non sono sta-

te allocate per un uso passivo (osservazioni *fuori banda*). Vi è una pratica comune nelle stazioni radioastronomiche, che consiste nel monitorare la situazione RFI su tali bande e scegliere tempi di osservazione e frequenze, tali da ricevere il minimo contributo possibile di rumore artificiale. Ricerche condotte sui differenti tipi di RFI hanno indicato che, in alcuni casi, è possibile neutralizzarle attivamente ed evitare la contaminazione dei segnali astronomici: l'applicazione combinata di elaborazione (lineare e non) analogica e digitale può dunque migliorare significativamente la qualità dei dati osservati.

È importante ricordare che *ad oggi non esiste ancora un metodo universale per la mitigazione delle interferenze nelle osservazioni radioastronomiche*. In particolare, l'applicabilità e l'efficacia delle procedure di mitigazione dipendono da diversi fattori, quali:

1. *Il tipo di radiotelescopio*: ad antenna singola (*single-dish*), interferometro connesso o VLBI¹. I radiotelescopi *single-dish* sono particolarmente vulnerabili alle RFI perchè tutte le radiointerferenze ricevute entrano *coerentemente* nel sistema. I dati ottenuti mediante i sistemi interferometrici invece, ne soffrono meno ma qualunque misura di potenza di rumore, effettuata su ciascuna antenna presa singolarmente, (per scopi di *calibrazione*, ad esempio) risulterà falsata dall'RFI.
2. *Il tipo di osservazione*: a riga spettrale o nel continuo². Per le osservazioni nel continuo è possibile sacrificare alcune sequenze di dati affette da RFI e salvare le parti restanti, il tutto con un leggera perdita di efficienza del tempo di osservazione. Per le osservazioni spettrali invece, le RFI a banda stretta ed il segnale di interesse possono venire a trovarsi a frequenze vicine, cosicchè può risultare più consona un'elaborazione nel dominio della frequenza. Tuttavia, in caso di sovrapposizione, non è possibile rimuovere la parte di spettro comune.
3. *Il tipo di RFI*: sequenze impulsive (*burst*), segnali a banda stretta o segnali a banda larga. Considerazioni teoriche e dati sperimentali mostrano che qualsiasi RFI può essere rappresentata come la sovrapposizione di due tipi di forme d'onda: sequenze impulsive e lunghe oscillazioni casuali a banda stretta³.

6.2 Metodologie di soppressione delle RFI

In questo paragrafo vengono considerati vari metodi di mitigazione delle interferenze e ne viene valutata l'applicabilità e l'utilità nei confronti delle osservazioni radioastronomiche. Tali metodi si basano tutti sulle caratteristiche dei moderni algoritmi di elaborazione numerica dei segnali e sulle

¹Very Long Baseline Interferometry. Interferometro ad alta risoluzione angolare ottenuto attraverso una collaborazione dei maggiori istituti radioastronomici europei, asiatici ed africani (<http://www.evlbi.org/>).

²Nel primo caso viene condotta una spettroscopia del segnale ricevuto, alla ricerca di eventuali righe di emissione dovute agli elementi chimici che potrebbero essere contenuti nella radiosorgente osservata. Nel secondo caso l'intera banda ricevuta viene utilizzata per condurre una misura radiometrica del segnale ricevuto.

³Per un approfondimento su questo modello si consulti: Middleton, D. 1972, Trans. IEEE EMC, EMC-14, 38; Middleton, D. 1977, Trans. IEEE EMC, EMC-19, 106 e Lemmon, J. J. 1997, Radio Sci., 32, 525.

tecniche di osservazione comunemente usate con gli attuali radiotelescopi. Va chiarito sin da subito che *l'efficacia di tutti i metodi di mitigazione delle RFI risulta proporzionale all'intensità del segnale interferente*: a prima vista può sembrare paradossale ma interferenze di *debole* intensità risultano più difficili da eliminare rispetto a quelle di intensità maggiore.

Esistono essenzialmente 3 strategie per sopprimere le RFI:

1. *Reiezione nel dominio del tempo*: questo tipo di soppressione risulta maggiormente efficace quando si ha a che fare con brevi ma intensi impulsi interferenti (*spikes*). Campionando con una frequenza di campionamento sufficientemente elevata e stabilendo poi una soglia di decisione (*threshold*), si possono ottenere dei buoni risultati, sebbene con deboli e lunghi segnali interferenti si possa avere qualche problema. RFI di questo tipo potrebbero essere meglio sopresse mediante metodi di reiezione in frequenza che tuttavia godono di applicabilità limitata nelle osservazioni di righe spettrali.
2. *Reiezione nel dominio della frequenza temporale*: l'intera banda del ricevitore può essere suddivisa in diversi *canali* (mediante un banco di filtri polifase, ad esempio) e i canali contenenti le RFI possono essere *inibiti*. Questa tecnica può soddisfare solo quei target osservativi per i quali non vi è contenuta particolare informazione spettrale nei canali che vengono “spenti”. Se il segnale RFI è concentrato in pochi canali, la reiezione di questi non avrà un impatto significativo sulla sensibilità radiometrica. Se invece l'RFI (nelle osservazioni di linee spettrali) si sovrappone spettralmente con la finestra di interesse, non potrà essere rimossa tanto semplicemente, perchè in tal caso verrebbe rimossa anche una parte del segnale utile. Se da un'analisi tempo-frequenza del segnale risulta che l'RFI è intermittente (cioè ha un *duty cycle* minore del 100%), la rimozione dell'RFI mediante questo metodo può essere considerata efficiente.
3. *Reiezione nel dominio della frequenza spaziale*: i metodi di filtraggio spaziale si basano sulla differenza nella direzione di arrivo (DOA) tra segnale di interesse ed RFI. L'emissione di RFI da sorgenti spazialmente localizzate può essere soppressa impiegando interferometri multi-elemento basati sulla filosofia degli array adattativi, in cui gli zeri del beampattern d'antenna vengono fatti coincidere con le DOA dei segnali indesiderati (Cap. 4). Questo è anche l'approccio preso in considerazione per i radiotelescopi di nuova generazione, come SKA.

Il filtraggio spaziale risulta efficace quando alle singole antenne di ogni sensore, l'RFI risulta essere fortemente correlata (come avviene ad esempio nei sistemi radar moderni che impiegano array rifasati).

I radiotelescopi single-dish con grandi antenne impiegano ricevitori total-power alla loro uscita, i quali risultano essere particolarmente vulnerabili alle RFI, perchè la potenza dell'interferente viene sommata completamente alla potenza di rumore di sistema ed alla potenza di rumore della radiosorgente desiderata. Di conseguenza, anche RFI estremamente deboli potranno risultare pericolose per lunghi periodi di integrazione, in quanto capaci di *imitare* deboli segnali astronomici.

Le RFI nei siti del sistema VLBI invece (separati da centinaia e migliaia di chilometri) sono praticamente *incorrelate*: la presenza delle RFI, in questo caso, si ripercuote all'uscita del correlatore solo con un leggero aumento della potenza di segnale. Questo aumento di potenza risulterà significativo solo qualora la potenza dell'RFI diventi comparabile con la potenza del rumore di sistema.

Gli interferometri connessi costituiscono un tipo intermedio di radiotelescopio, di cui la *Croce del Nord* ne costituisce un valido esempio. Per questi sistemi la correlazione risulta essere fortemente elevata per le antenne adiacenti (con meno di 100m di separazione), mentre diventa più modesta già per distanze (*baselines*) superiori ad 1km e particolarmente bassa per baselines di 10–100km. A causa delle spaziatore elevate tra i sensori, l'efficacia delle tecniche di *adaptive nulling* tradizionali non può essere così elevata come nel caso degli array rifasati che impiegano una spaziatore di $\lambda/2$.

6.2.1 Parametri che descrivono i risultati dei metodi

Per valutare le prestazioni di un metodo di soppressione delle RFI occorre rispondere alle seguenti domande:

1. Qual è il livello medio di soppressione raggiunto per il segnale interferente?
2. A quanto ammonta la perdita complessiva di segnale utile a seguito del processo di mitigazione?

I parametri che possono essere impiegati per quantificare i risultati ottenuti da un certo metodo di mitigazione sono principalmente due:

1. Il guadagno che si ottiene dal processo di soppressione dell'RFI, caratterizzato dal rapporto:

$$G_{proc} = \frac{SNR_{dopo\ processing}}{SNR_{prima\ processing}} \quad (6.1)$$

2. La perdita che deriva dal processo di soppressione dell'RFI relativa alla situazione ideale (assenza di RFI):

$$R_{proc} = \frac{SNR_{dopo\ processing}}{SNR_{senza\ RFI}} \quad (6.2)$$

Il rapporto segnale/rumore (SNR) è determinato come il rapporto tra l'uscita dal radiotelescopio dovuta al segnale di interesse e dal valore quadratico medio delle fluttuazioni di questa.

6.3 Cinque metodi di soppressione delle RFI

In questo paragrafo verrà preso in considerazione un certo numero di metodi di soppressione delle RFI. Alcuni di questi metodi sono già stati visti nei capitoli precedenti sul beamforming e qui

verranno completati con esempi ed approfondimenti. Si osservi che *l'accostamento tra le tecniche di RFI mitigation e le tecniche di beamforming è inevitabile in quanto uno degli obiettivi della sintesi di apertura consiste proprio nel controllo dei segnali interferenti.*

6.3.1 Rimozione nel dominio tempo-frequenza (*thresholding*)

Una descrizione generale del segnale $x(t)$ all'uscita di un radiotelescopio può essere la seguente:

$$x(t) = x_{sig}(t) + x_{sys}(t) + x_{RFI}(t) \quad (6.3)$$

dove $x_{sig}(t)$ è il segnale di interesse, $x_{sys}(t)$ è il rumore di sistema complessivo (esterno ed interno al ricevitore) e $x_{RFI}(t)$ è il segnale interferente. $x_{sig}(t)$ e $x_{sys}(t)$ sono segnali casuali con una distribuzione di probabilità Gaussiana, a media nulla e varianza rispettivamente σ_{sig}^2 e σ_{sys}^2 . $x_{RFI}(t)$ è invece un segnale la cui forma d'onda ed i cui parametri statistici (distribuzione di probabilità e momenti) possono essere fortemente variabili a seconda della natura dell'interferente. Questa variabilità può essere dovuta al moto della sorgente di interferenza, ai movimenti dell'antenna, al contenuto nel segnale (nel caso di trasmissioni broadcast o radiomobili), all'interferenza (costruttiva o distruttiva) dovuta alla propagazione a cammini multipli (*multi-path*), etc.

I segnali ricevuti da un radiotelescopio possono essere rappresentati in forma semplificata sul piano tempo-frequenza (Fig. 6.1), dove le parti in grigio sono le aree libere da RFI, nelle quali è pertanto presente solo $x_{sig}(t) + x_{sys}(t)$; mentre le parti in nero corrispondono alla presenza di RFI.

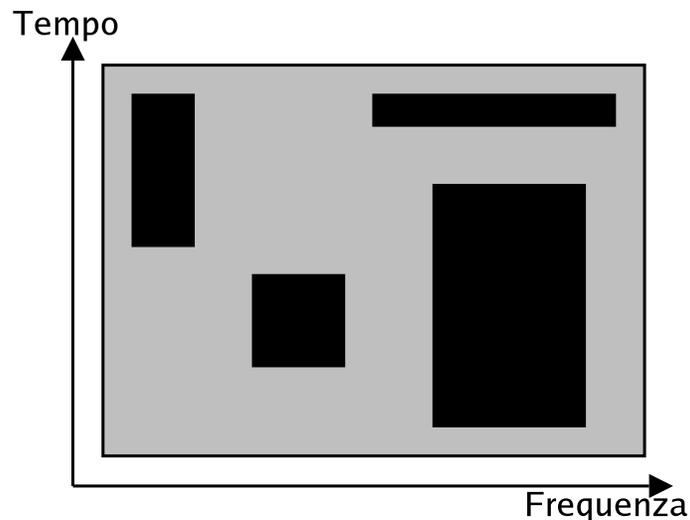


Figura 6.1: Dati in uscita dal radiotelescopio rappresentati nel piano *tempo-frequenza*. Le aree in grigio sono rappresentative del segnale di interesse e del rumore di sistema complessivo, mentre le aree in nero sono indicative della presenza di interferenti.

Pertanto occorre un'analisi tempo-frequenza di $x(t)$ con una risoluzione sufficientemente elevata per entrambi gli assi, al fine di rilevare quali siano le zone “*nera*” per poi rimuoverle.

È difficile prescrivere una risoluzione temporale δt ed una risoluzione spettrale δf che vadano bene per rilevare tutte le varietà di RFI. Tuttavia, è possibile fornire alcuni range di valori determinati da prove sperimentali:

$$\delta t \approx 0.1 \dots 1 \mu s \quad (6.4)$$

$$\delta f \approx 1 \dots 50 KHz \quad (6.5)$$

Quest'ultimo valore in particolare è piuttosto critico e dipende dalla banda del ricevitore Δf , che può variare da alcune decine di KHz ad alcune centinaia di MHz. Quando il rapporto tra l'ammontare di dati scartati e l'ammontare totale dei dati $\Delta f \cdot T$ (con T tempo di integrazione) è minore del $5 \div 10\%$, questo metodo può essere usato efficacemente per le osservazioni nel continuo.

Un valore tipico per il livello di soglia è dato da $\pm 3\sigma_{sys}$.

In Fig. 6.2 viene riportata una simulazione di osservazione *total-power* del transito di una radiosorgente con impostata una *soglia temporale* dei dati. In Fig. 6.3 viene riportato nel piano $xy \equiv$ piano tf un segnale radioastronomico affetto da RFI ed in Fig. 6.4 si ha la stima spettrale dello stesso segnale ottenuta mediante l'inserimento di una *soglia spettrale*.

6.3.2 Rimozione mediante stima parametrica (*autoclean*)

RFI fortemente correlate e temporalmente disperse possono essere sopresse ricorrendo a tecniche di cancellazione basate sulla *stima della forma d'onda dell'RFI* e successiva sottrazione di questa dall'insieme *segnale + RFI*:

$$x_{CLEAN}(t) = x(t) - \hat{x}_{RFI}(t) \quad (6.6)$$

La forma d'onda dell'RFI, $\hat{x}_{RFI}(t)$, (o il suo spettro complesso) può essere stimata usando una qualunque tecnica di filtraggio disponibile (filtro di Wiener, wavelet denoising, identificazione parametrica, etc). La stima può quindi essere sottratta dai dati in uscita nel dominio del tempo o della frequenza. Questo meccanismo di *autoclean* è schematizzato in Fig. 6.5 mentre in Fig. 6.6 viene riportata una simulazione ottenuta mediante questa tecnica.

Un ulteriore esempio di approccio parametrico al problema dell'RFI mitigation può essere trovato in [32], dove un forte segnale interferente generato da un satellite GLONASS viene rappresentato attraverso un modello parametrico i cui parametri vengono stimati ad ogni pacchetto dati ricevuto. Il modello parametrico dell'RFI viene poi utilizzato per ricreare la forma d'onda del segnale inter-

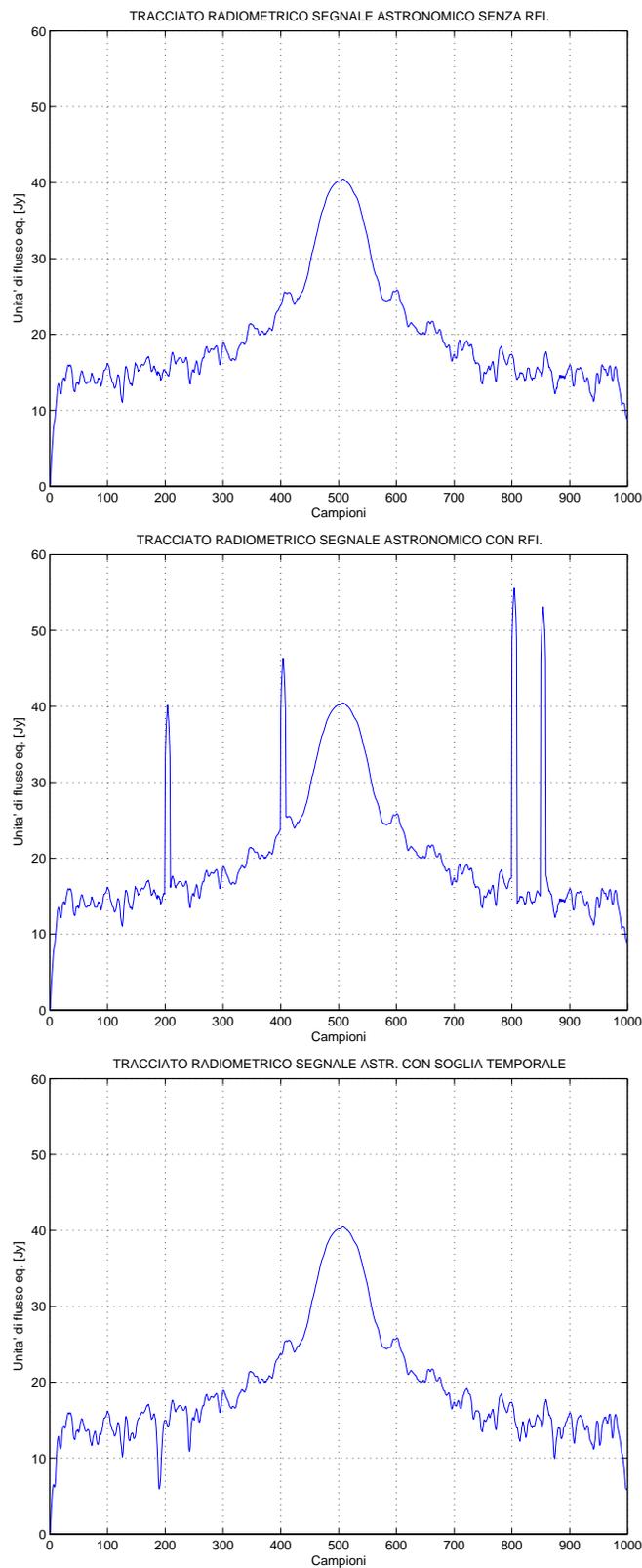


Figura 6.2: Esempio con *soglia temporale* dei dati. Nella prima figura viene riportato il tracciato radiometrico che si ottiene dall'osservazione del transito di una radiosorgente. Nella seconda figura si ha lo stesso segnale affetto da interferenze. Nell'ultima figura si ha il tracciato radiometrico che si ottiene applicando il metodo di una soglia nel tempo.

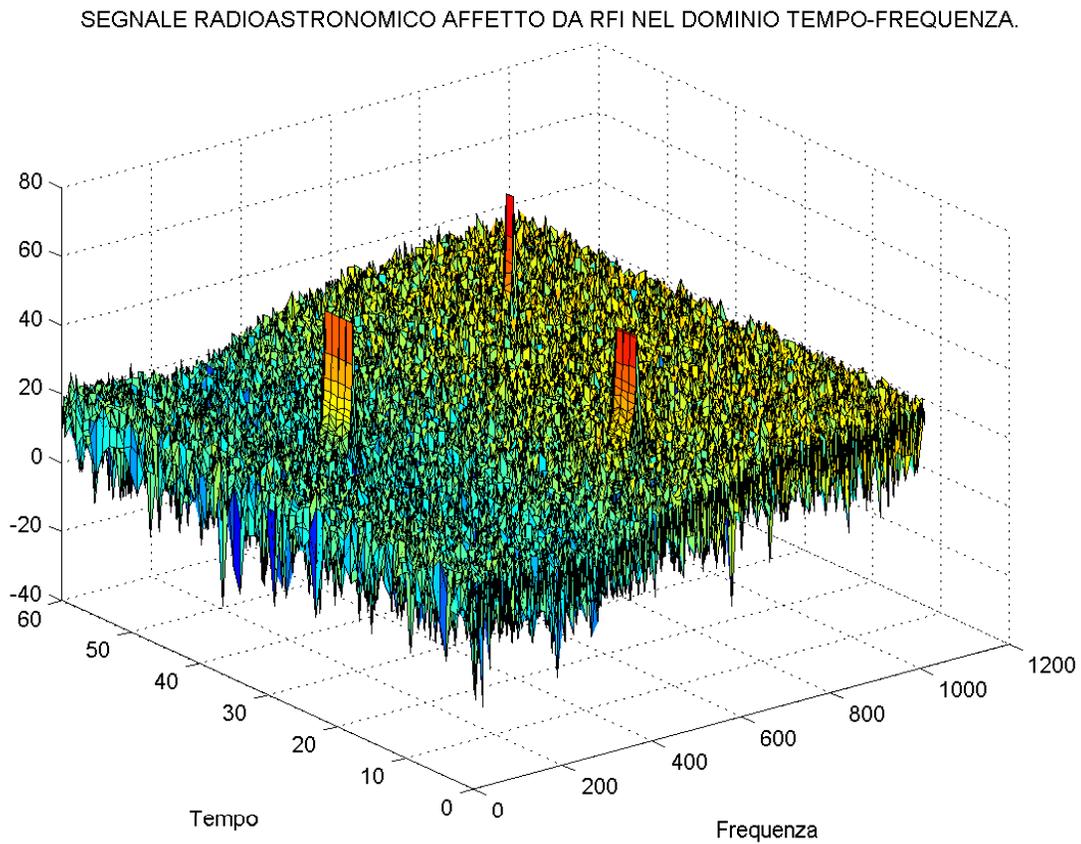


Figura 6.3: Rappresentazione nel dominio tempo-frequenza di un segnale radioastronomico affetto da RFI. In questo esempio, per il rumore di sistema, è stato utilizzato del rumore *colorato*.

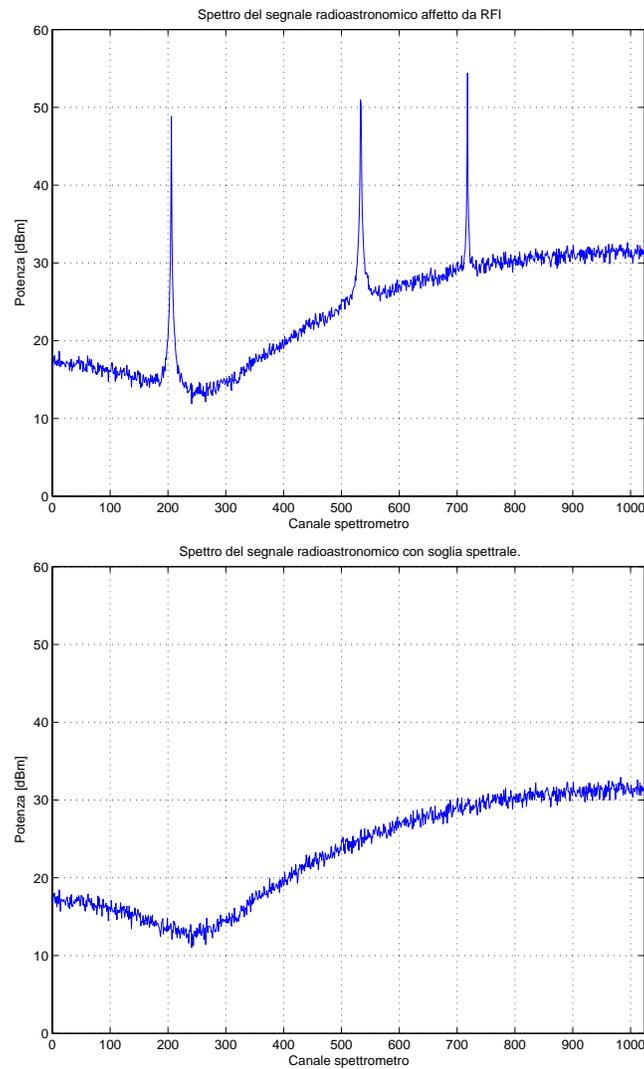


Figura 6.4: Stima spettrale del segnale rappresentato in Fig. 6.3. Nel primo riquadro viene riportato lo spettro ottenuto senza filtraggio (con RFI, quindi) mentre nel secondo lo stesso spettro ottenuto ricorrendo al metodo con soglia spettrale.

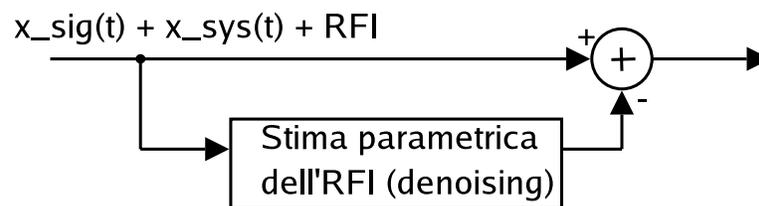


Figura 6.5: Metodo di cancellazione delle RFI mediante filtraggio *autoclean*.

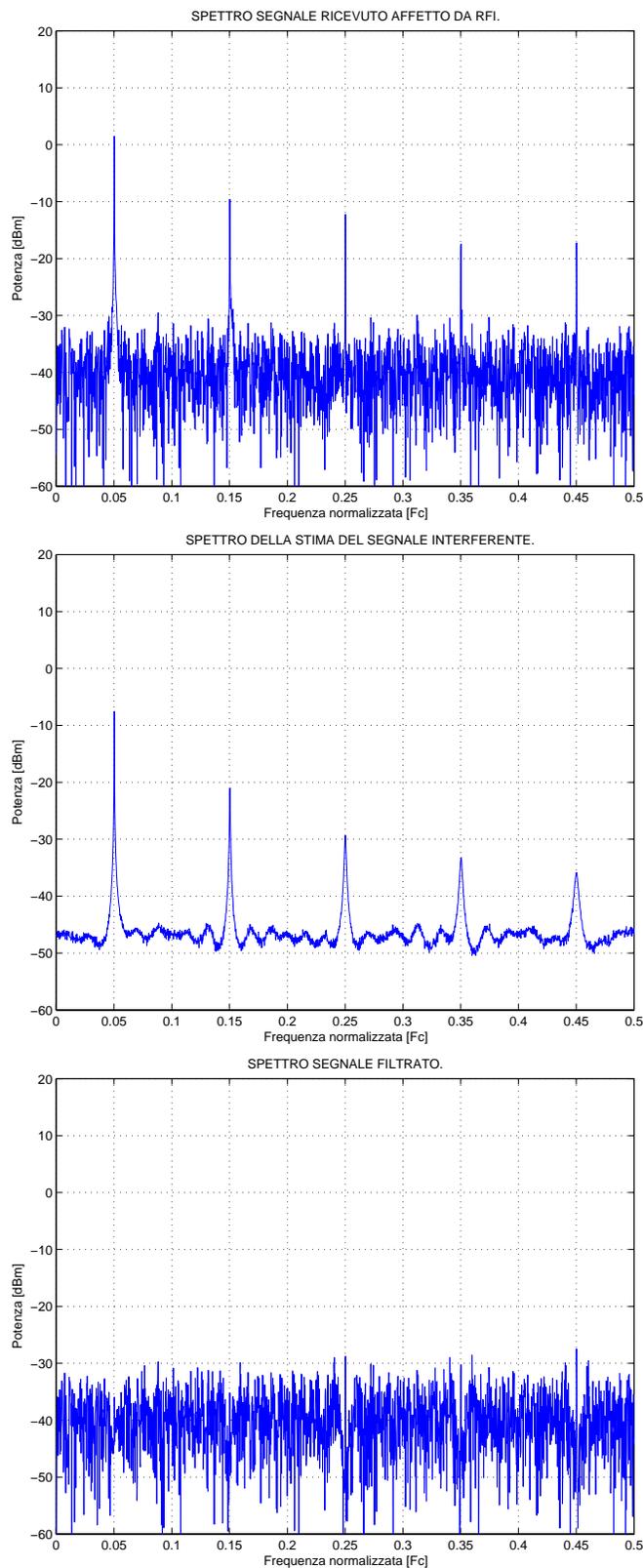


Figura 6.6: Esempio di rimozione delle RFI mediante filtraggio *autoclean* (stima parametrica). Nella prima figura viene riportato lo spettro del segnale radioastronomico affetto da una serie di RFI, nel secondo riquadro lo spettro del segnale interferente stimato mediante filtro di Wiener. Nell'ultimo riquadro lo spettro del segnale a seguito del processo di mitigazione.

ferente, il quale, a sua volta, viene sottratto dal processo $RFI + segnale + noise$. Il segnale utile nel caso specifico era una riga spettrale dello ione ossidrilico (OH^-) a $1612MHz$.

A questo punto occorre una precisazione riguardo l'uso dei metodi di *thresholding* e di *autoclean*: in entrambi i casi *deve essere nota a priori la forma di base dello spettro del rumore di sistema*. Infatti questa in genere non è rettangolare (come nel caso ideale) (Fig. 6.3) ma riporta la forma della funzione di trasferimento del ricevitore. È importante che essa sia nota in quanto in entrambi i metodi viene presa come termine di paragone per gli spettri correnti delle RFI.

6.3.3 Rimozione adattativa delle interferenze mediante canali di riferimento (MSC)

Si tratta essenzialmente della tecnica descritta nel Cap. 5.

Un canale di riferimento, distinto da quello principale, viene impiegato al fine di ottenere una stima indipendente del segnale interferente $\hat{x}_{RFI}(t)$. In Fig. 6.7 viene riportato uno schema a blocchi relativo all'applicazione di questo tipo di algoritmo. Ci sono due canali di dati: un canale principale

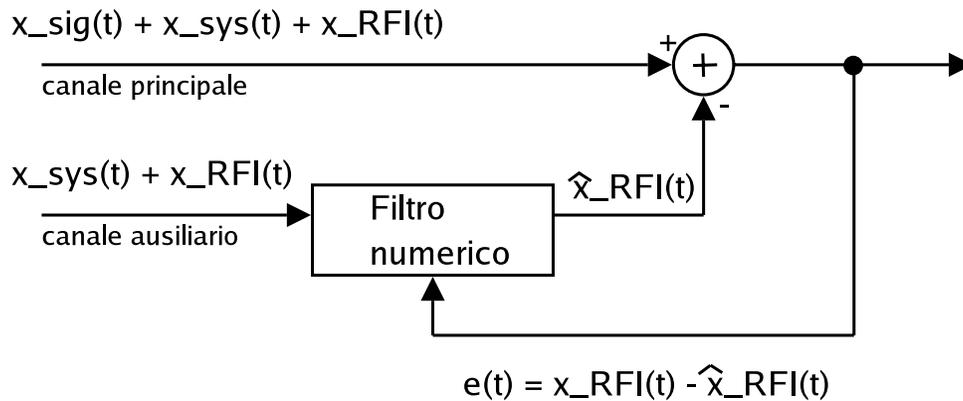


Figura 6.7: Metodo di cancellazione delle RFI mediante filtraggio su canale ausiliario.

con il radiotelescopio puntato in direzione della radiosorgente e contenente il segnale interferente, ed un canale ausiliario (o canale di riferimento) con un'antenna distinta in puntamento *off-source* contenente anch'essa il solo segnale interferente. Sebbene entrambi i canali contengano il segnale interferente, questi non sono identici a causa dei differenti cammini di propagazione e dei diversi radioricevitori. La procedura prevede allora l'utilizzo di un filtro adattativo per trasformare il segnale interferente nel canale di riferimento in modo tale che il segnale d'errore tenda a zero:

$$e(t) = x_{main}(t) - x_{ref}(t) \rightarrow 0 \quad (6.7)$$

Il valore assunto da questo segnale viene utilizzato per il calcolo dei coefficienti del filtro.

Questa tecnica può essere applicata sia nel dominio del tempo (*filtraggio adattativo*) sia nel dominio della frequenza, mediante una procedura del tipo: $FFT \rightarrow \text{filtraggio adattativo su ogni canale} \rightarrow FFT^{-1}$. Questo tipo di cancellazione delle RFI risulta particolarmente utile per le osservazioni di righe spettrali, dove l'RFI ed il segnale di interesse occupano lo stessa banda di frequenze.

In Fig. 6.8 viene riportato un interessante esempio di RFI mitigation ottenuto mediante questo metodo dove un segnale radioastronomico viene disturbato da una portante a radiofrequenza modulata in FM.

6.3.4 Rimozione mediante filtraggio spaziale con sistemi multi-elemento (*beamforming*)

Il posizionamento adattativo degli zeri del beampattern d'antenna in direzione delle sorgenti di RFI viene ampiamente utilizzato nei sistemi radar e nei sistemi di radiocomunicazione (*antenne smart*) ed è stato ampiamente trattato nei capitoli precedenti: questa tecnica può essere applicata ai radiointerferometri multi-elemento (MERIs⁴) purchè si tenga conto di alcune limitazioni:

1. I MERIs della radioastronomia in genere sono array sparsi o comunque le distanze tra le antenne sono piuttosto elevate (anche significativamente maggiori di $\lambda/2$). Pertanto, a causa dell'equivocazione spaziale, l'efficienza dell'adaptive nulling risulterà notevolmente ridotta nel caso di sistemi a banda larga.
2. Tutte le procedure di *adaptive nulling* presumono che le sorgenti di disturbo siano spazialmente ben localizzate, mentre ciò non è sempre vero.

Numerosi esempi di beamforming adattativo possono essere trovati nei capitoli precedenti.

6.3.5 Rimozione mediante analisi della distribuzione di probabilità dello spettro di potenza

Il metodo di soppressione delle RFI basato sull'*analisi della distribuzione di probabilità* del segnale in uscita dal radiotelescopio ha applicazioni sia in osservazioni del continuo sia in osservazioni spettrali. Il rumore di sistema ed il segnale della radiosorgente in genere hanno entrambi una distribuzione Gaussiana a media nulla. La trasformata di Fourier di tali segnali (ideali) produce in ogni canale spettrale, una componente reale ed una componente immaginaria, che sono ancora variabili aleatorie Gaussiane a media nulla. Inoltre, lo spettro di potenza istantanea (cioè il modulo quadro dello spettro complesso) ha una distribuzione *esponenziale*, che può essere descritta mediante una χ^2 con due gradi di libertà⁵.

⁴Multi-Element Radio Interferometer.

⁵Si veda ad esempio: A. Papoulis and S.U. Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 4th edition, 2002.

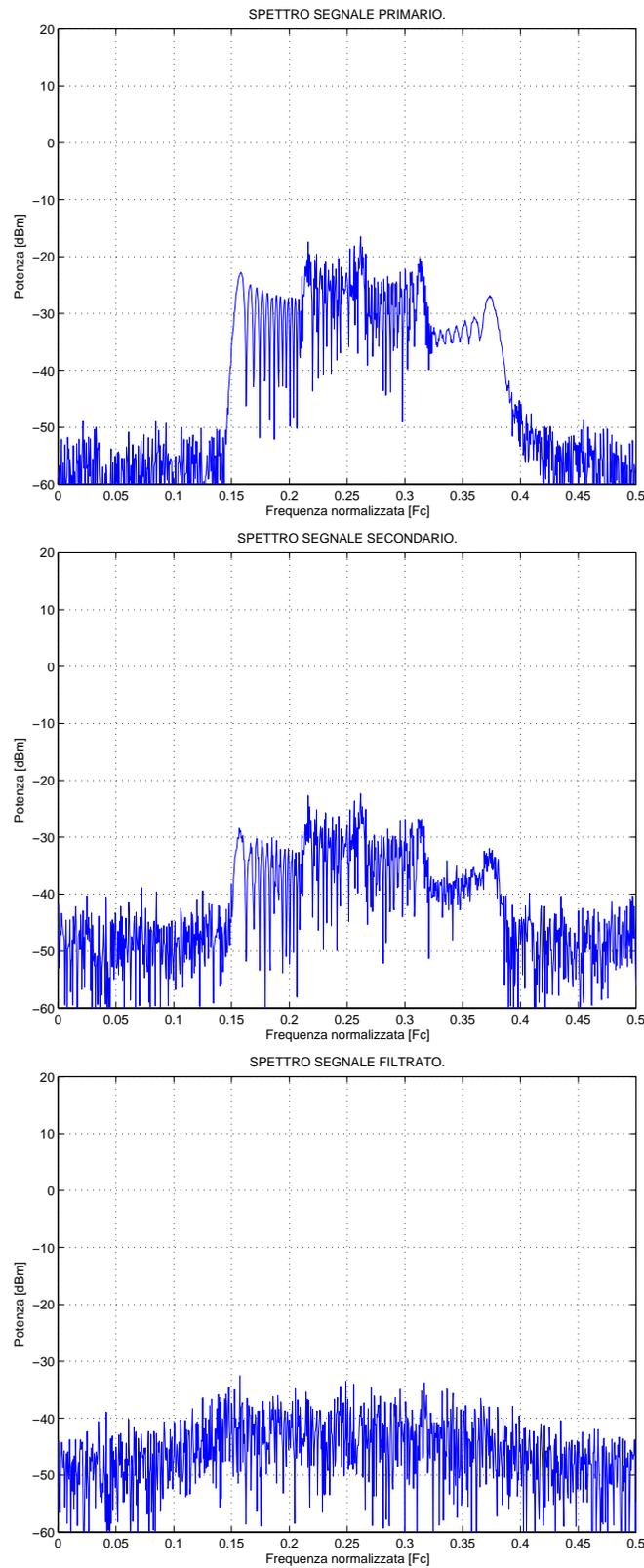


Figura 6.8: Esempio di cancellazione adattativa mediante metodo MSC. La prima figura riporta il rumore radioastronomico in uscita dal canale principale disturbato da una portante RF modulata in FM. La seconda riporta invece l'uscita del canale ausiliario (l'RFI è presente in copia attenuata e sfasata mentre il rumore di sistema è differente nei due casi). Infine, l'ultimo riquadro riporta il segnale filtrato. Per il filtro numerico (FIR) sono stati usati 128 coefficienti.

La presenza di una RFI modifica ulteriormente il segnale ideale e porta ad un cambiamento della sua statistica. Lo spettro di potenza modificato avrà ora una distribuzione χ^2 *non centrata con due gradi di libertà*. Tuttavia le pratiche radioastronomiche standard impiegano integrazioni significative dello spettro di potenza, che tendono a convertire nuovamente la distribuzione di probabilità dello spettro di potenza in una distribuzione Gaussiana. Quindi, solo un'analisi in *real-time* mediante l'uso di DSP, applicati immediatamente dopo i correlatori (*e prima degli integratori*) consentirebbe una separazione delle due componenti di segnale.

Tale metodo può essere impiegato sia con osservazioni del continuo sia con osservazioni di righe spettrali. Nel caso del continuo, parti dello spettro con una caratteristica *non Gaussiana* potrebbero essere oscurate o filtrate. Bisogna tuttavia osservare, che stime valide dei momenti superiori (*cumulanti*) dei dati richiederebbero tempi di integrazione maggiori di quelli necessari alla stima del primo momento (cioè la *media*). Ciò è importante per la mitigazione delle interferenze deboli. D'altra parte, intervalli di integrazione elevati smorzerebbero la variabilità delle RFI e condurrebbero a delle stime considerevolmente polarizzate. Dovrebbe quindi essere adottato un compromesso, il quale implicherebbe però alcune limitazioni sulle capacità di questo metodo di rilevare e rimuovere le RFI più deboli.

6.4 Valutazione dei metodi di mitigazione

Dunque è possibile distinguere *tre fasi* del processo di acquisizione dati nei quali i metodi di mitigazione possono essere applicati:

1. *Fase di pre-rivelazione*. Si tratta di un'elaborazione *real-time* in banda base, basata sull'analisi tempo-frequenza e sulla cancellazione adattativa del rumore usando canali di riferimento. Questo approccio richiede l'implementazione di tecniche veloci di processing numerico ($> 100GIPs$)⁶, che possono essere già raggiunte con l'hardware di elaborazione attuale, basato su moduli DSP o FPGA. Tuttavia, l'implementazione di queste tecniche di mitigazione delle RFI può essere non facile e talvolta può essere tecnicamente impossibile da integrare nei backends già esistenti.
2. *Fase di post-rivelazione e pre-integrazione*. Si tratta ancora di elaborazioni *real-time* che possono introdurre l'analisi tempo-frequenza come parte del processo di correlazione (prima dell'integrazione dei dati). Anche l'implementazione di questi metodi richiede hardware appositamente concepito, in aggiunta ai backends esistenti.
3. *Fase di post-integrazione*. Possono essere tecniche di elaborazione *off-line* come il *post-correlation filter* descritto nel paragrafo 6.5. Questo approccio è attraente dal punto di vista pratico, perchè non richiede alcuna modifica nell'hardware esistente del radiotelescopio. Tuttavia, può risultare meno efficace dei metodi precedenti, i quali agiscono in tempo reale.

⁶Giga Instructions Per Second.

Bisogna osservare che l'applicazione di tali metodi non esclude altre misure tecniche, quali lo sviluppo di front-end ad alta linearità e di filtri analogici a bassa perdita di inserzione ($< 0.05dB$) e ad alta attenuazione in banda arrestata ($> 70dB$).

6.4.1 RFI mitigation e tipologie di radiotelescopi

I telescopi single-dish sono i più vulnerabili ai segnali RFI. A seconda del tipo di osservazione da effettuare e dell'elettronica disponibile, possono essere intraprese strategie differenti:

1. Le *osservazioni nel continuo* sono meglio servite con oscuramento (*blanking*) dei dati a livello di post-rivelazione e con filtraggio ad alte risoluzioni temporali ($\approx \mu s$) e frequenziali ($< 1KHz$).
2. Le *osservazioni spettrali* sono meglio servite con metodi che utilizzano antenne di riferimento. In questo caso, una stima del segnale RFI può essere sottratta dal segnale principale con un filtraggio adattativo in tempo reale, o con elaborazione off-line utilizzando i dati prodotti dai correlatori.

L'analisi della statistica di ordine superiore dei segnali ricevuti costituisce un metodo efficace di rivelazione e mitigazione delle RFI, ma richiede delle modifiche strutturali considerevoli negli spettrometri esistenti che, al momento in genere si limitano a fornire solo degli spettri mediati. Le nuove generazioni di spettrometri per uso radioastronomico dovrebbero essere concepite in modo tale da essere in grado di misurare anche i momenti di ordine superiore dello spettro.

Gli interferometri a larga connessione (come WSRT, VLA, GMRT e MERLIN) sono meno vulnerabili alle RFI prodotte dall'uomo e le procedure di compensazione dei ritardi costituiscono già una valida tecnica di soppressione naturale dei deboli segnali interferenti che giungono all'interferometro. Forti segnali interferenti causano un significativo aumento della varianza di rumore del segnale in uscita dai correlatori e quindi distorcono le funzioni di visibilità. Pertanto, in questo caso, blanking in tempo reale a livello di pre-correlazione e filtraggio con o senza un'antenna di riferimento possono portare ad un considerevole guadagno in termini di soppressione delle RFI.

La soppressione delle RFI usando coefficienti complessi (*adaptive nulling*) può essere efficace anche per gli interferometri come nel caso di tradizionali array rifasati a mezz'onda. Bisogna tuttavia ricordare che viene ad essere modificata la struttura ampiezza-fase delle funzioni di visibilità di immagine. Qualora l'obiettivo dell'osservazione sia allora la mappatura di una regione di cielo, è necessario *conservare* i valori adottati per tali coefficienti, al fine di consentire più tardi alla fase di imaging di tenerne conto correttamente.

Il filtraggio spaziale è efficace solo se l'RFI è significativamente correlata nei punti dove sono collocate le antenne dell'interferometro. Questo non sempre è verificato per via dei cammini multipli di propagazione (*multipath*) e di altre limitazioni dovute alla geometria delle sorgenti di RFI. L'uso di una speciale antenna di riferimento che punti alla sorgente di RFI può risultare particolarmente at-

traente, in quanto questa procedura non interferisce con le infrastrutture esistenti del radiotelescopio e riesce a fornire elevati rapporti segnale/rumore.

6.4.2 Conclusioni

Una valutazione quantitativa dell'efficacia dei differenti metodi non è sempre possibile. In primo luogo perchè gli algoritmi di mitigazione delle RFI sono spesso procedure *non lineari*. Secondariamente, perchè il livello di soppressione di un segnale interferente raggiunto con un certo metodo dipende dall'intensità frazionale dell'RFI stessa (cioè dall'INR) e dalle sue caratteristiche spaziali, temporali e spettrali. Il caso estremo è il metodo più semplice con soglia nel dominio del tempo o della frequenza. Se assumiamo che il segnale RFI sia $100dB$ più intenso del rumore di sistema ed ignoriamo le non idealità del ricevitore, questo livello di RFI può essere facilmente rilevato ed eliminato. In conseguenza di ciò si ottiene facilmente un guadagno di soppressione $\gg 100dB$, perchè non si ha alcun residuo di RFI. Tuttavia, vi sarà un certo aumento della deviazione standard di rumore al correlatore o all'uscita del rivelatore dovuta all'eliminazione di un certo numero di campioni e l'effetto sarà dunque una certa perdita di SNR.

Pertanto, una valutazione semplificata dei metodi di mitigazione delle interferenze è affetta dalla dipendenza da casi particolari. Un limite pratico per ogni metodo è dato dall'INR. Talvolta non è possibile rimuovere l'RFI sotto il livello di rumore dei dati e ciò è utile anche per comprendere gli effetti cumulativi delle tecniche di mitigazione delle RFI nelle varie fasi di acquisizione dei dati: differenti metodi possono essere applicati simultaneamente, come filtri sui front-end, elaborazione in tempo reale, elaborazione a livello di post-correlazione, etc. causando continuamente, ad ogni fase di elaborazione, dei *cambiamenti nelle caratteristiche delle RFI*.

In ultimo si osservi che presso ogni radiotelescopio terrestre che si trovi ad operare in ambienti elettromagneticamente ostili, dovrebbe essere creato ed aggiornato un database delle RFI, al fine di fornire dei consigli utili alle procedure di osservazione riguardo la scelta di metodi di mitigazione da adottare. La combinazione di un database e di un sistema hardware/software costituisce un buon punto di partenza per la realizzazione di un sistema di mitigazione delle interferenze.

Riassumendo, da quanto detto finora è possibile trarre le seguenti conclusioni:

1. Poichè vi sono differenti tipi di radiotelescopi, differenti procedure osservative e diversi tipi di segnali interferenti, *non esiste un metodo di mitigazione universale*.
2. Una scelta appropriata del metodo di mitigazione dell'RFI, dovrebbe essere condotta tenendo conto dei particolari dell'ambiente interferente, luogo per luogo.
3. L'applicazione di tecniche digitali di mitigazione delle RFI in radioastronomia è ancora in fase di sperimentazione. Tuttavia, sono stati ottenuti risultati incoraggianti mediante simulazioni al calcolatore, sia attraverso elaborazione *on-line* dei dati, sia *off-line*.

4. I radiotelescopi single-dish e gli interferometri multi-elemento attuali dovrebbero essere equipaggiati di sistemi di mitigazione delle RFI al fine di raggiungere pienamente il proprio potenziale osservativo.
5. I radiotelescopi di nuova generazione dovrebbero essere concepiti già da subito con sistemi di mitigazione delle RFI.
6. Vi sono diverse fasi nel processo di acquisizione dei dati astronomici dove i metodi di mitigazione delle RFI possono essere applicati: prima dei correlatori, tra i correlatori e gli integratori, dopo gli integratori.

6.5 RFI mitigation mediante *post-correlation filter*

Il filtraggio adattativo è uno degli strumenti più promettenti nella disciplina dell'RFI mitigation: esso rivela la presenza di interferenze nei dati astronomici e ricava una funzione correttiva valida per rimuovere (o per lo meno ridurre) l'interferenza. Tuttavia esistono due possibili implementazioni di questo filtro: la prima che prevede l'impiego dello stesso direttamente sul segnale di media frequenza (IF), dunque prima della fase di rivelazione e per tale ragione viene chiamato *pre-detection filter*; la seconda che prevede invece l'impiego del filtro dopo la fase di correlazione e pertanto prende il nome di *post-correlation filter*. Gli astronomi hanno confrontato le prestazioni di queste due tipologie di filtro e per quanto concerne la radioastronomia la seconda soluzione sembra essere quella in grado di fornire i risultati migliori. La Fig. 6.9 riporta schematicamente il problema dell'RFI mitigation inteso in senso tradizionale, cioè mediante *pre-detection filter*.

6.5.1 Pre-detection filter

Si tratta del filtro convoluzionale descritto nel Cap. 5, un elegante schema che opera direttamente sul segnale a media frequenza (IF) in uscita dal radiotelescopio (Fig. 6.9). Di seguito vengono effettuate ulteriori considerazioni su tale filtro, utili alla comprensione del post-correlation filter (paragrafo 6.5.2).

Si assuma per il momento che il sistema operi in una ristretta banda di frequenze. Si vorrebbe che il filtro compensasse ampiezza e fase del riferimento IF fino a che l'interferenza risultasse essere una buona copia dell'interferenza, presente nel canale astronomico. Una sottrazione del segnale di riferimento dal segnale astronomico porterà ad un segnale A_{out} privo della radiointerferenza. Sfortunatamente vi sono alcuni problemi: l'IF di riferimento contiene anche il rumore del ricevitore. Un aumento del guadagno, necessario per bilanciare l'RFI, produrrà anche un aumento di rumore del ricevitore, mentre una diminuzione degraderà il livello di cancellazione dell'RFI. Dal momento che gli astronomi non distinguono la potenza di rumore dalla potenza dell'interferenza, il guadagno ottimo del filtro (dal punto di vista dell'astronomo) è quello che minimizza la potenza in uscita dallo stadio IF. Questo è il principio sul quale lavora questo filtro.

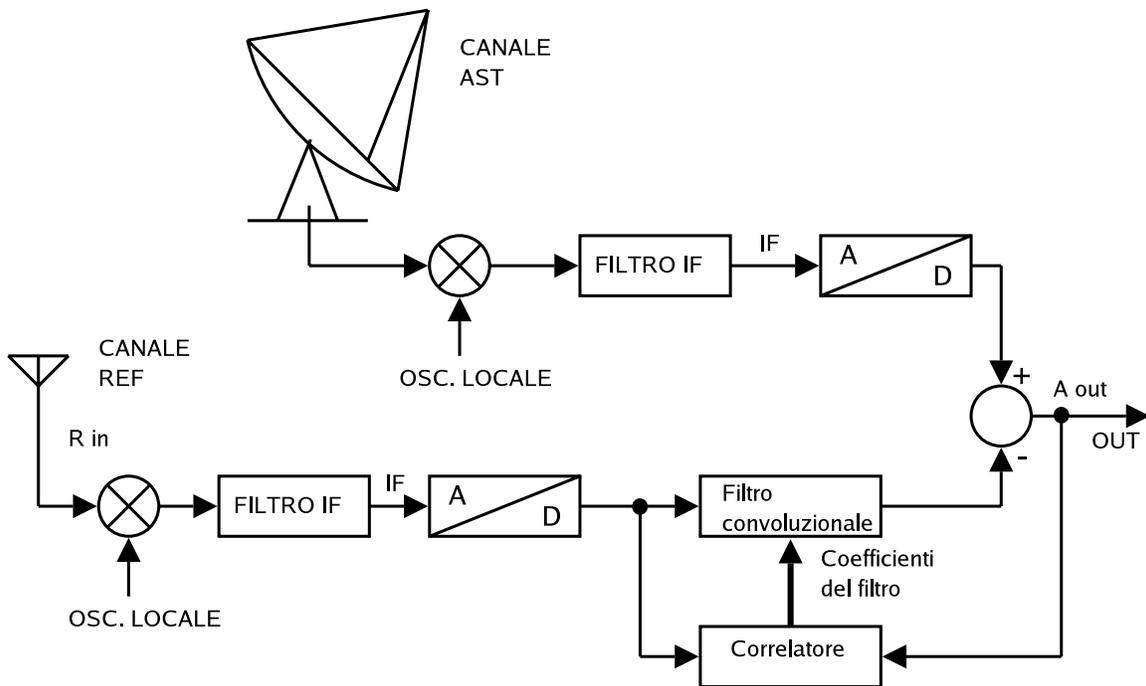


Figura 6.9: Il *pre-detection filter*. La condizione $\langle R_{in} \cdot A_{out} \rangle = 0$ porta ad un minimo della potenza di A_{out} in uscita. Occorre un'antenna di riferimento che fornisca una copia dell'interferenza ma sia insensibile al segnale astronomico. Il filtro modifica il segnale dell'antenna di riferimento in modo che risulti essere una copia quanto più fedele dell'interferenza presente nel segnale astronomico IF.

Più formalmente, si ha:

$$P_{out} = N_{ast} + RFI \cdot (c_{ast} - g \cdot c_{ref})^2 + g^2 N_{ref} \quad (6.8)$$

dove: N_{ast} e N_{ref} sono le potenza di rumore in uscita rispettivamente dal ricevitore astronomico e dal ricevitore ausiliario; c_{ast} e c_{ref} sono fattori che descrivono l'accoppiamento (in tensione) dell'interferenza nei due canali; RFI è la potenza dell'interferenza, normalizzata al fattore di accoppiamento unitario e g esprime il guadagno (complesso) in tensione del filtro.

La minimizzazione di P_{out} si ha per:

$$g = \frac{RFI c_{ast}^* c_{ref}}{N_{ref} + c_{ref}^2 RFI} \quad (6.9)$$

e per tale valore ottimale del guadagno, la potenza in uscita vale:

$$P_{out} = N_{ast} + \frac{RFI c_{ast}^2}{1 + INR} \quad (6.10)$$

dove INR è il rapporto tra la potenza dell'interferenza nel segnale di riferimento e la potenza del rumore:

$$INR = \frac{c_{ref}^*}{N_{ref}} \quad (6.11)$$

In altre parole, l'astronomo “vedrà l'interferenza” ridotta di un fattore $(1 + INR)$ in potenza. Si noti che inizialmente (senza filtraggio) lo spettro era alterato dall'interferenza; ora, con il filtro in azione, l'unica alterazione si deve ad un piccolo residuo dell'interferenza e ad una piccola frazione di rumore presente nel ricevitore.

L'uscita del correlatore ovviamente sarà soggetta a fluttuazioni dovute al rumore, è pertanto auspicabile ricorrere a valori medi dei parametri ottenuti su un tempo di integrazione T . Il valore più appropriato per T è dato dal periodo di aggiornamento che avrebbero i coefficienti del filtro in assenza di rumore, ovvero dall'ordine di tempo sul quale cambierebbero i termini di accoppiamento c . Tale valore si deve a sua volta a considerazioni di natura propagativa, come il ritardo relativo tra antenna di riferimento e antenna astronomica e cammini multipli.

Comunque si tratta generalmente di fenomeni relativamente lenti, con valori compresi tra $1 \div 10$ s che produrranno in genere risultati soddisfacenti.

Questo filtro gode di diversi aspetti favorevoli:

1. Esso si adatta automaticamente alle variazioni dei coefficienti di accoppiamento, variazioni che possono essere dovute a cause molteplici: durante il tracking della radiosorgente possono

essere coinvolti diversi lobi secondari; il ritardo relativo tra l'antenna di riferimento e quella astronomica potrebbe cambiare se la sorgente di interferenza è in movimento oppure potrebbe variare il guadagno del ricevitore.

2. Il filtro è in grado di gestire correttamente i cammini multipli.
3. L'azione del filtro cessa quando l'interferenza scompare. Non si ha penalizzazione in termini di rumore annullando l'interferenza.
4. Può gestire più sorgenti di interferenza purchè non si abbia sovrapposizione spettrale.

All'occhio dell'astronomo, il filtro agisce come una sorta di *attenuatore*, riducendo la potenza legata all'interferenza di un fattore di attenuazione pari a $1/(1 + INR)$. Quindi, il filtro inizia ad essere poco efficiente quando si ha $INR \sim 1$.

6.5.2 Post-correlation filter

Il filtraggio adattativo eseguito dopo la fase di correlazione costituisce un'implementazione alternativa di grande interesse per la radioastronomia, in quanto non richiede modifiche strutturali all'architettura attuale dei radiotelescopi. La sua forma viene schematizzata in Fig. 6.10. Al correlatore giungono 3 segnali di media frequenza, la IF astronomica (a) e due IF di riferimento indipendenti (1 e 2). Per i segnali di riferimento *possono essere utilizzate le due polarizzazioni di un'unica antenna oppure due catene riceventi indipendenti con la medesima polarizzazione*. Nel correlatore viene ricavato in IF l'auto-spettro del segnale astronomico (X_{aa}) ed i 3 cross-spettri⁷ (X_{a1} , X_{a2} e X_{12}). Una combinazione dei cross-spettri fornisce uno spettro correttivo che cancellerà l'interferenza dall'auto-spettro astronomico.

Il punto di forza di questo approccio sta nel fatto che *si opera su dati che hanno già subito una prima integrazione*, cioè dopo l'operazione di rivelazione. Questo significa che non si hanno contributi dalle componenti di potenza totale dei canali di riferimento; e dunque i dati non risultano polarizzati. C'è un ulteriore vantaggio, consistente nel fatto che anche i prodotti *rumore \times interferenza* vengono cancellati.

All'istante di tempo t , lo spettro V del segnale interferente è:

$$V(f, t) = c(f, t)I(f, t) \quad (6.12)$$

dove $I(f, t)$ è l'interferenza per come viene trasmessa mentre $c(f, t)$ esprime l'accoppiamento dell'interferenza nel canale IF. Sia c che I varieranno nel tempo, ma su scale temporali differenti. I è

⁷Si ricorda che all'interno del correlatore le densità spettrali di potenza vengono stimate come le trasformate di Fourier delle auto-correlazioni e delle cross-correlazioni.

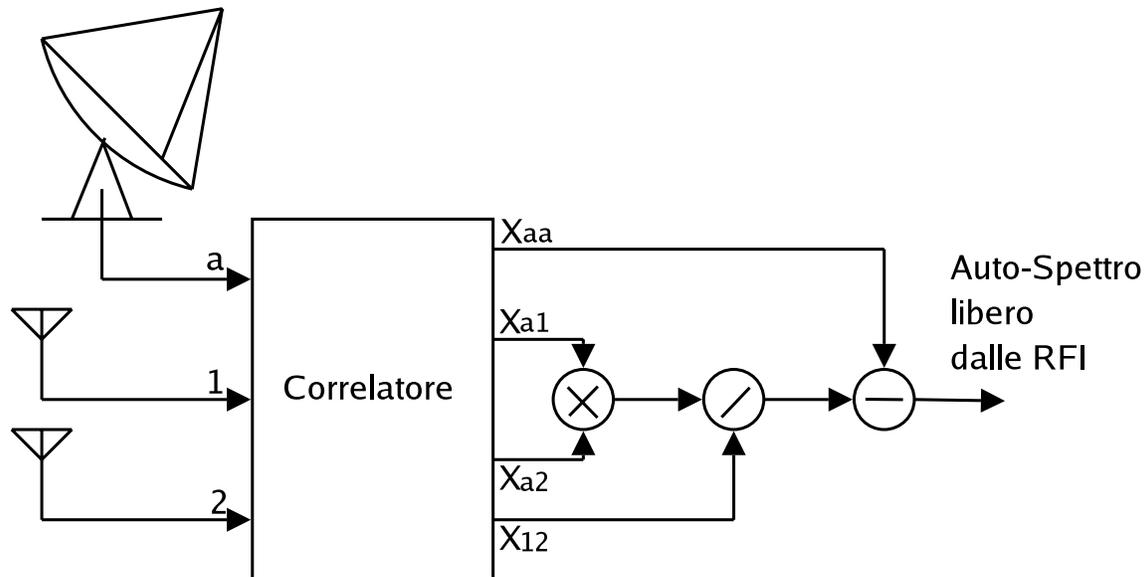


Figura 6.10: Il *post-correlation filter* in modalità *single-dish*. Similmente al caso del *pre-detection filter* occorrono due antenne di riferimento (1 e 2) che forniscano una copia dell'interferenza ma siano quanto più insensibili al segnale astronomico. Il filtraggio viene eseguito dopo le fasi di correlazione ed integrazione, dalle quali si ricavano 1 auto-spettro (X_{aa}) e 3 cross-spettri (X_{a1} , X_{a2} e X_{12}). Una combinazione dei 3 cross-spettri fornisce uno spettro correttivo che viene sottratto all'auto-spettro, rimuovendo così l'interferenza indesiderata.

proporzionale a $1/B$, dove B è la banda del canale; mentre c varierà molto più lentamente, dal momento che dipende da variazioni nel cammino di propagazione, e da possibili variazioni dei cammini multipli (*multi-path*).

Dunque è possibile semplificare l'uscita del correlatore, separando questi due contributi:

$$\langle V_i V_j^* \rangle = c_i c_j^* \langle I I^* \rangle \quad (6.13)$$

dove

$$\langle \rangle = \frac{1}{\tau} \int dt \quad (6.14)$$

esprime l'operazione di *integrazione*, ovvero di media temporale. Questa separazione tra i termini $c(t)$ e $I(t)$ nell'integrazione è fondamentale per il principio di funzionamento del post-correlation filter. Inoltre, maggiore sarà la scala dei tempi caratteristica di $c(t)$, maggiori saranno le prestazioni del filtro in condizioni di basso INR.

Il termine *correttivo* si ricava da una combinazione dei cross-spettri:

$$corr = \frac{\langle V_a V_1^* \rangle \langle V_a V_2^* \rangle^*}{\langle V_1 V_2^* \rangle} = \frac{X_{a1} X_{a2}^*}{X_{12}^*} \quad (6.15)$$

Come nel caso del pre-detection filter, i limiti sull'efficacia di questo filtro sono dettati dal rumore nel canale di riferimento. Tuttavia, dal momento che l'operazione viene effettuata dopo il processo di correlazione, sarà il valore *rms* del rumore, piuttosto che la sua *potenza* a dare il limite di efficienza, abbassando la soglia di un fattore $\sqrt{B\tau}$.

La costante di integrazione (τ) dovrebbe assumere il valore più alto possibile. Il suo limite superiore è determinato dal periodo di stabilità dei coefficienti di accoppiamento. Per sorgenti di interferenza terrestri, le variazioni saranno dovute al movimento dell'antenna, la quale esporrà successivamente diversi lobi secondari all'interferenza. Un valore tipico si ha per $\tau \sim 10s$. Il problema sarà più complicato nel caso di interferenze provenienti da satelliti a bassa orbita.

Vi è tuttavia un costo associato al post-correlation filter: un aumento del valore efficace del rumore di sistema. L'incremento è massimo ai minimi livelli di interferenza. (Un semplice rimedio a questo problema consiste nell'impiegare un meccanismo per disabilitare il filtro ai livelli inferiori).

In Fig. 6.11 viene riportato un esempio di filtraggio mediante post-correlation filter dove un segnale radioastronomico è affetto da due RFI: un segnale modulato in FM ed una portante fissa. Si osserva facilmente come il filtro sia in grado di fornire uno spettro del segnale astronomico, ripulito delle interferenze.

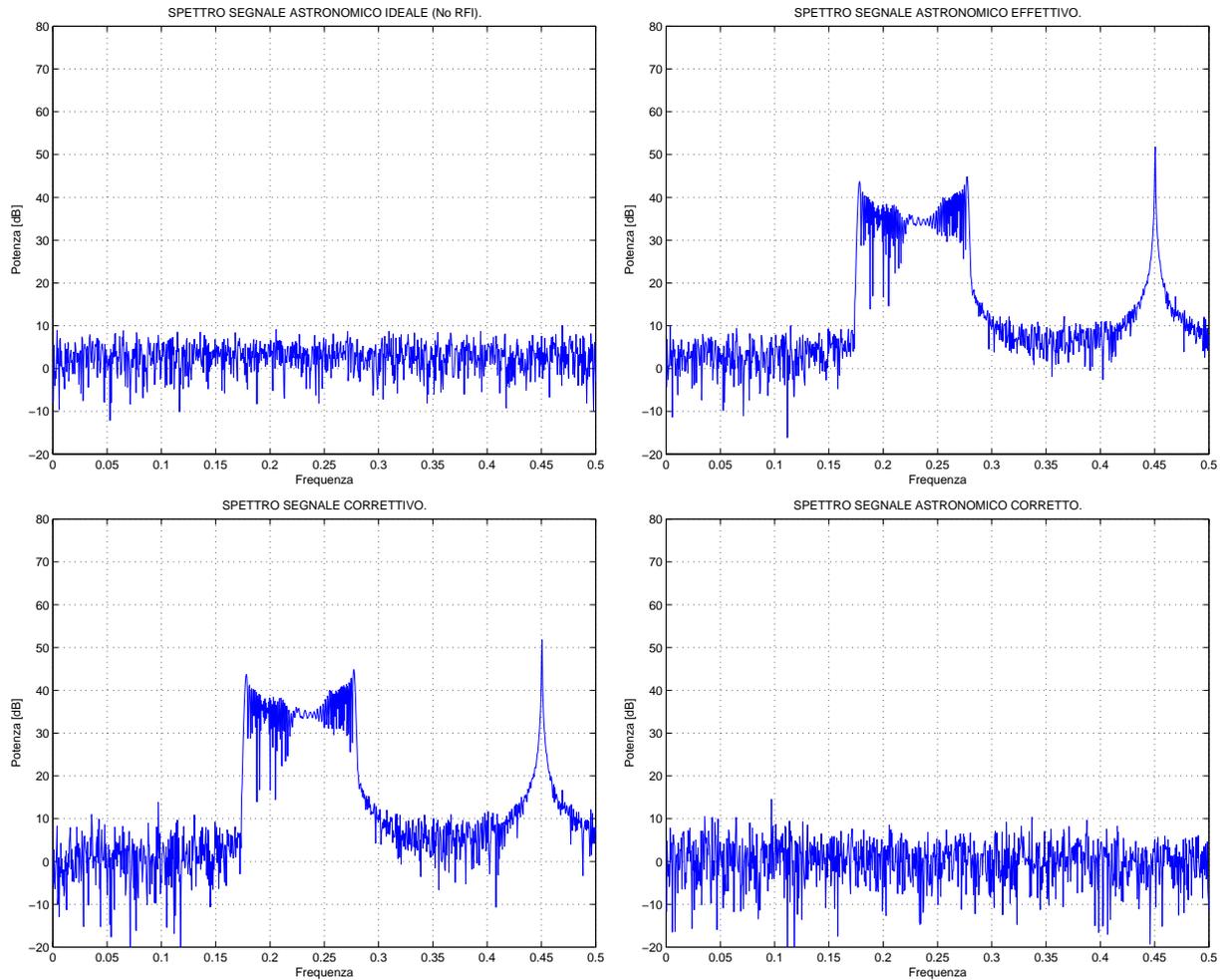


Figura 6.11: Esempio di RFI mitigation ottenuto mediante post-correlation filter. Nel primo riquadro viene riportato lo spettro di un segnale radioastronomico (rumore termico). Nel secondo riquadro lo stesso segnale affetto da due interferenze: un segnale modulato in frequenza ed una portante fissa. Nel terzo riquadro si ha lo spettro correttivo risultante dalla 6.15 mentre nell'ultimo riquadro lo spettro del segnale ricevuto dopo il processo correttivo.

6.5.3 Uso del post-correlation filter negli interferometri

Il post-correlation filter può essere facilmente impiegato anche nei sistemi interferometrici. La Fig. 6.12 propone un semplice schema di utilizzo: l'unica differenza rispetto al caso single-dish, è che questa volta viene ripulito un cross-spettro (X_{ab}) anziché un auto-spettro (X_{aa}).

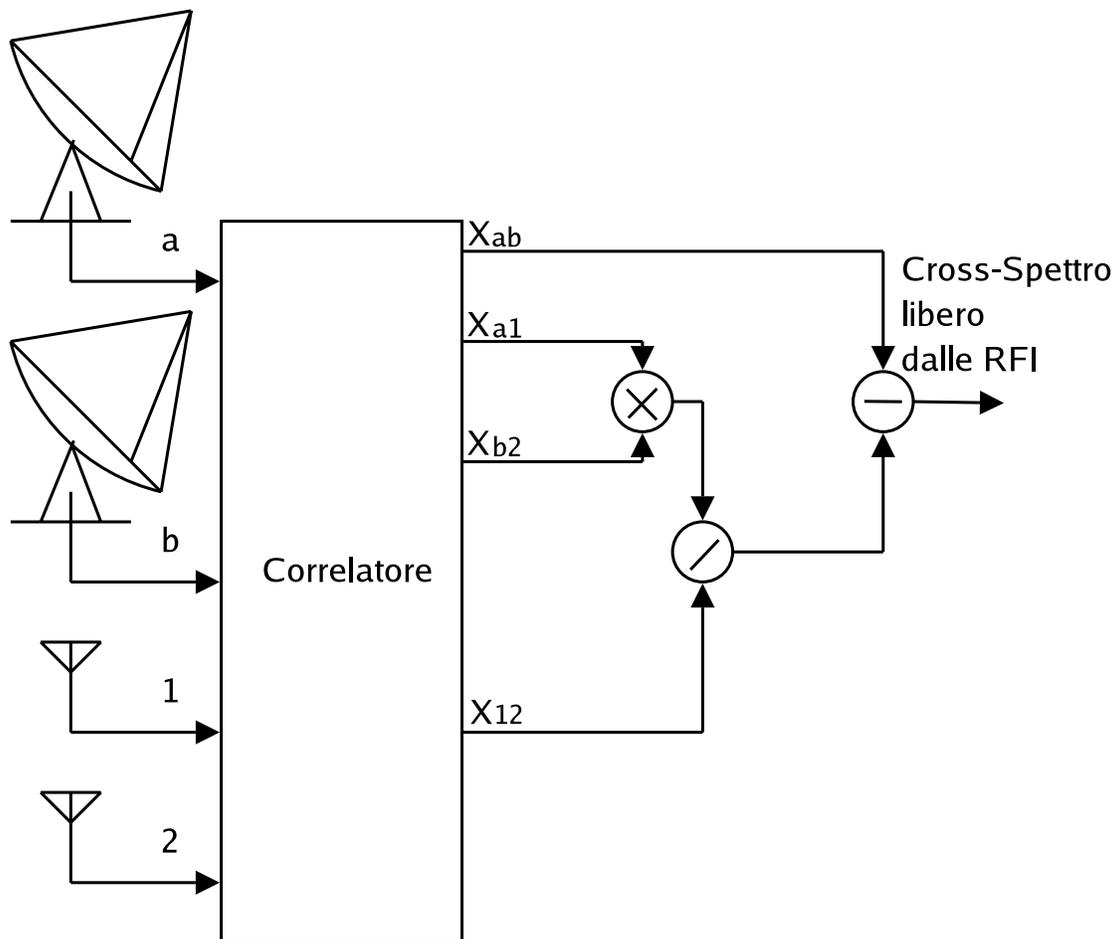


Figura 6.12: Il *post-correlation filter* usato in combinazione con un array interferometrico. Essenzialmente è lo stesso schema visto per il post-correlation filter in modalità single-dish, l'unica differenza sta nel fatto che viene ripulito un cross-spettro (X_{ab}) anziché un auto-spettro (X_{aa}).

6.5.4 Dettagli matematici sul post-correlation filter

Si consideri per semplicità il caso single-dish descritto in Fig. 6.10. Il caso interferometrico risulta del tutto analogo. Complessivamente si costruiscono 4 densità spettrali di potenza:

$$X_{aa}(f) = \frac{1}{T} \int V_a(f, t) V_a^*(f, t) dt \quad (6.16)$$

$$X_{a1}(f) = \frac{1}{T} \int V_a(f, t) V_1^*(f, t) dt \quad (6.17)$$

$$X_{a2}(f) = \frac{1}{T} \int V_a(f, t) V_2^*(f, t) dt \quad (6.18)$$

$$X_{12}(f) = \frac{1}{T} \int V_1(f, t) V_2^*(f, t) dt \quad (6.19)$$

dove gli indici "a", "1" e "2" si riferiscono ai differenti canali IF: Astronomico, Riferimento 1 e Riferimento 2. Nel seguito si utilizza la seguente notazione semplificata:

$$X_{aa} = \langle V_a V_a^* \rangle \quad (6.20)$$

L'IF astronomica ha tre componenti: il rumore del ricevitore, il segnale astronomico e l'interferenza:

$$V_a(f) = N_a(f) + A(f) + c_a I(f) \quad (6.21)$$

mentre le IF di riferimento ne hanno solo due:

$$V_1(f) = N_1(f) + c_1 I(f) \quad (6.22)$$

$$V_2(f) = N_2(f) + c_2 I(f) \quad (6.23)$$

Le cross-correlazioni contengono termini stazionari (l'interferenza, presente in entrambe le IF portate al correlatore) e termini di rumore (i prodotti incorrelati):

$$X_{a1} = X_{a1}^s + X_{a1}^n \quad (6.24)$$

dove i termini stazionari sono:

$$X_{a1}^s = \langle II^* c_a c_1^* \rangle \quad (6.25)$$

$$X_{a2}^s = \langle II^* c_a c_2^* \rangle \quad (6.26)$$

$$X_{12}^s = \langle II^* c_1 c_2^* \rangle \quad (6.27)$$

Ai termini di interferenza si applicano due differenti scale temporali: $I(t)$ infatti potrebbe avere un andamento da rumore (noise-like), variando come $(1/B)$, mentre i termini c relativi alla propagazione del segnale (cammini multipli ed interazioni con i lobi laterali dell'antenna, dovrebbero così risultare molto più lenti. A condizione che l'intervallo di integrazione (T) sia modesto rispetto alla scala dei tempo di c , nelle correlazioni possiamo separare il termine "I" dal termine "c" :

$$X_{a1}^s = c_a c_1^* \langle II^* \rangle \quad (6.28)$$

Allora è possibile ricavare il termine correttivo da sottrarre all'autocorrelazione:

$$X_{corr} = \frac{X_{a1}^s (X_{a2}^s)^*}{(X_{12}^s)^*} = c_a c_a^* \langle II^* \rangle + noise \quad (6.29)$$

dove il *noise* è dato da:

$$X_{aa}^n = c_a \langle IN_a^* \rangle + c_a^* \langle I^* N_a \rangle \quad (6.30)$$

$$X_{a1}^n = c_a \langle IN_1^* \rangle + c_1^* \langle I^* N_a \rangle + \langle N_a N_1^* \rangle \quad (6.31)$$

$$X_{a2}^n = c_a \langle IN_2^* \rangle + c_2^* \langle I^* N_a \rangle + \langle N_a N_2^* \rangle \quad (6.32)$$

$$X_{12}^n = c_1 \langle IN_2^* \rangle + c_2^* \langle I^* N_1 \rangle \quad (6.33)$$

Si hanno due regimi distinti da prendere in considerazione:

1. Quando l'interferenza è di livello considerevole questa procedura porterà ad una cancellazione della stessa come ad una cancellazione di un segnale stazionario presente nello spettro; l'interferenza tuttavia manifesterà ancora la sua presenza con un leggero aumento di rumore, con un livello che dipenderà dallo suo spettro. Tuttavia, dal momento che si tratta comunque di rumore, potrà essere ridotto ulteriormente per integrazione.
2. Il meccanismo di cancellazione degrada lentamente al diminuire dell'intensità interferente; pertanto è necessaria una certa attenzione ai bassi livelli, eventualmente occorrono misure precauzionali per disabilitare il sistema ai livelli inferiori.

CASO 1: Interferenze ad alti livelli

Il criterio in questo caso è l'intensità relativa di rumore (il valore rms dei prodotti di rumore incorrelato) e l'interferenza (il segnale stazionario):

$$c^2 I^2 \gg \frac{N^2}{\sqrt{BT}} \quad (6.34)$$

Sotto queste condizioni le espressioni dei prodotti di cross-correlazione possono essere semplificati:

$$X_{a1} = X_{a1}^s \left(1 + \frac{X_{a1}^n}{X_{a1}^s} \right) = c_a c_1^* I^2 \left(1 + \frac{\langle I^* N_a \rangle}{c_a I^2} + \frac{\langle IN_1^* \rangle}{c_1^* I^2} + \frac{\langle N_a N_1^* \rangle}{c_a c_1^* I^2} \right) \quad (6.35)$$

$$X_{a2} = X_{a2}^s \left(1 + \frac{X_{a2}^n}{X_{a2}^s} \right) = c_a c_2^* I^2 \left(1 + \frac{\langle I^* N_a \rangle}{c_a I^2} + \frac{\langle I N_2^* \rangle}{c_2^* I^2} + \frac{\langle N_a N_2^* \rangle}{c_a c_2^* I^2} \right) \quad (6.36)$$

$$X_{12} = X_{12}^s \left(1 + \frac{X_{12}^n}{X_{12}^s} \right) = c_1 c_2^* I^2 \left(1 + \frac{\langle I^* N_1 \rangle}{c_1 I^2} + \frac{\langle I N_2^* \rangle}{c_2^* I^2} + \frac{\langle N_1 N_2^* \rangle}{c_1 c_2^* I^2} \right) \quad (6.37)$$

Perciò in questo caso, tutti i prodotti di rumore incorrelato che coinvolgono l'interferenza verranno cancellati. Lo spettro d'autocorrelazione corretto sarà:

$$X_{aa}^{corr} \sim A^2 + N_a^2 + \frac{c_a^*}{c_1^*} \langle N_a N_1^* \rangle + \frac{c_a}{c_2} \langle N_a^* N_2 \rangle + \frac{c_a c_a^*}{c_1^* c_2} \langle N_1^* N_2 \rangle \quad (6.38)$$

Se INR è il rapporto interferenza/rumore, per ipotesi uguale per entrambi i canali di riferimento:

$$INR = \frac{c^2 I^2}{N^2} \quad (6.39)$$

Il guadagno può essere riscritto come:

$$G = \frac{\frac{c_a^*}{c_1^*} \langle N_a N_1^* \rangle + \frac{c_a}{c_2} \langle N_a^* N_2 \rangle + \frac{c_a c_a^*}{c_1^* c_2} \langle N_1^* N_2 \rangle}{c_a^2 I^2} \sim \frac{\sqrt{BT}}{INR} \quad (6.40)$$

CASO 2: Interferenze a bassi livelli

La cancellazione inizierà a malfunzionare quando il livello rms di rumore diventerà comparabile all'interferenza: le fluttuazioni nel termine correttivo aumenteranno. La strategia più sicura in questo caso consiste semplicemente nel disabilitare il filtro.

6.6 Modelli di RFI

Le radiointerferenze in genere giungono ai ricevitori attraverso i lobi secondari dell'antenna e possono essere più o meno forti del rumore di sistema. Una loro caratteristica importante è possedere un certo *steering vector*, la cui espressione diviene esplicita solo nel caso di segnali a banda stretta.

Esempi di RFI possono essere i segnali prodotti dai ripetitori televisivi, dai satelliti di posizionamento (GPS e GLONASS) e di telecomunicazioni (IRIDIUM), radiotaxi, comunicazioni aeronautiche e radiomobili (GSM, UMTS). Pertanto, le interferenze possono essere segnali continui o intermittenti, a banda stretta o larga, deboli o forti. Nei paragrafi seguenti si cercherà di costruire un modello valido a rappresentarle. Successivamente tale modello verrà utilizzato per introdurre validi metodi di rivelazione (*RFI detection*). In ultimo verrà illustrato il *metodo delle proiezioni spaziali*, un'efficace tecnica di mitigazione delle interferenze basata su una trasformazione della matrice di covarianza.

6.6.1 Modello di interferenza a banda stretta

Si supponga di avere un solo segnale interferente che incida sull'array. L'RFI raggiunge la schiera con ritardi τ_i differenti per sensore. Dopo la demodulazione (complessa) in banda base, si ha:

$$x_i(t) = a_i s(t - \tau_i) e^{-j2\pi f \tau_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (6.41)$$

dove $s(t)$ rappresenta il segnale in banda base ed a_i il guadagno del sensore in direzione dell'interferente, inclusa ogni possibile attenuazione del canale. Diversamente da quanto viene illustrato nella maggior parte della letteratura tecnica al capitolo *array signal processing*, i coefficienti a_i possono variare a seconda del sensore preso in considerazione. L'interferenza può trovarsi in campo vicino e ciò implica che il segnale incida su ogni sensore con angoli differenti, mentre la risposta degli stessi non è omnidirezionale.

Per segnali a banda stretta, ritardi temporali minori dell'inverso della banda conducono a sfasamenti puri del segnale in banda base⁸. Questa ben nota proprietà sta alla base di molte tecniche di elaborazione dei segnali basate sugli array rifasati.

In pratica, se vale l'ipotesi di banda stretta, allora si ha:

$$s(t - \tau_i) = s(t) \quad (6.42)$$

ed il modello viene semplificato.

Si osservi che si sta già supponendo di elaborare un segnale filtrato a sottobande. Sia W la banda di ciascuna sottobanda (filtro). Se la *baseline* maggiore ha lunghezza l_{max} , a questa corrisponde un ritardo massimo pari a

$$\tau_{max} = \frac{l_{max}}{c} \quad (6.43)$$

dove c è la velocità della luce. Pertanto, l'ipotesi di banda stretta regge fintanto che si ha:

$$W \ll \frac{1}{\tau_{max}} = \frac{c}{l_{max}} \quad (6.44)$$

Sotto quest'ipotesi, le uscite dai p sensori di ogni filtro a frequenza f possono essere rappresentate in un unico vettore $\mathbf{x}_f(t)$:

⁸Proakis, J. G. 1995, Digital Communications (terza edizione; New York: McGraw-Hill).

$$\mathbf{x}_f(t) = \begin{bmatrix} a_1 e^{-j2\pi f \tau_1} \\ a_2 e^{-j2\pi f \tau_2} \\ \vdots \\ a_p e^{-j2\pi f \tau_p} \end{bmatrix} s(t) \equiv \mathbf{a}s(t) \quad (6.45)$$

dove \mathbf{a} costituisce il vettore risposta dell'array alla frequenza f e risulta essere lentamente variabile nel tempo ($\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$).

Analogamente, per q interferenti, si ha:

$$\mathbf{x}_f(t) = \sum_{j=1}^q \mathbf{a}_j(t) s_j(t) = \mathbf{A}_s(t) s(t) \quad (6.46)$$

con

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_q(t) \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{A}_s(t) = [\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \dots, \mathbf{a}_q(t),] \quad (6.47)$$

dove l'indice s viene adottato per distinguere $\mathbf{A}_s(t)$ dalla matrice risposta dell'array alle sorgenti astronomiche.

La corrispondente matrice di correlazione ed il suo stimatore temporale sono rispettivamente:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{E}[\mathbf{x}_f(t)\mathbf{x}_f(t)^H] = \mathbf{A}_s(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{A}_s^H(t) \quad (6.48)$$

$$\hat{\mathbf{R}}(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{x}_f(t+mT)\mathbf{x}_f^H(t+mT) \quad (6.49)$$

dove $\hat{\mathbf{R}}(t)$ viene ricavato mediando M osservazioni. La matrice $\mathbf{R}_s(t) = \mathbf{E}[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}(t)^H]$ di dimensioni $q \times q$ dipende dalle proprietà di correlazione dei segnali interferenti. La matrice degli interferenti indipendenti sarà una diagonale con le q potenze interferenti sulla diagonale principale.

Quanto sia valida la stima di $\mathbf{R}(t)$ dipende dalla stazionarietà dello scenario sugli intervalli di integrazione MT ed è tuttora oggetto di discussione. La potenza dei segnali televisivi ad esempio sarà stazionaria su lunghi periodi (dell'ordine di decine di secondi). Mentre, i segnali di comunicazione, come quelli usati nei sistemi di comunicazione mobile GSM, sono *time-slotted*: il tempo viene ripartito in *frames* da circa $5ms$ e tali frames, a loro volta, vengono ripartiti in 8 *time-slot*. In questo schema di accesso a divisione di tempo (TDMA, *Time Division Multiple Access*), ogni utente può trasmettere solo nel suo slot temporale di $0.577ms$, tempo oltre il quale deve rimanere muto per 7

volte questo periodo prima di poter ritrasmettere nel frame successivo. Pertanto, in questo caso, si ha una stazionarietà a breve periodo ($0.577ms$) ed una ciclostazionarietà con periodi di circa $5ms$.

La stazionarietà delle colonne di $\mathbf{A}_s(t)$ invece dipende dalla stazionarietà della posizione delle sorgenti interferenti, dalla loro distanza, dalla frange interferometriche e dall'orientamento dei sensori.

La conclusione è che per rilevare la presenza di interferenze, $\widehat{\mathbf{R}}(t)$ è una stima utile solo su brevi intervalli di tempo, nei quali l'interferenza risulta stazionaria. In pratica MT deve essere dell'ordine dei millisecondi.

6.6.2 Modello complessivo: segnali astronomici con interferenze e rumore

In sintesi, il modello ricavato è il seguente:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{\Gamma}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{B}\mathbf{A}^H(t)\mathbf{\Gamma}(t) + \mathbf{A}_s(t)\mathbf{R}_s(t)\mathbf{A}_s^H(t) + \sigma^2\mathbf{I} \quad (6.50)$$

dove:

$\mathbf{R}(t)$ è la matrice di covarianza dei dati della quale sono state ricavate stime ad intervalli di tempo discreti t . Ha dimensioni $p \times p$, con p numero di sensori.

\mathbf{A} è la matrice $p \times d$ risposta dell'array a d sorgenti celesti discrete. Le sue colonne sono funzioni note delle posizioni delle sorgenti. Si tratta di una matrice molto allungata: $d \gg p$, e si può assumere stazionaria su un periodo di $10s$.

\mathbf{B} è una matrice diagonale $d \times d$ (reale positiva) contenente la brillantezza di ogni sorgente. Si assume che sia tempo-invariante su un'osservazione completa.

$\mathbf{\Gamma}$ sono matrici diagonali (reali positive) che rappresentano i guadagni d'antenna (ignoti) e lentamente tempo-varianti.

\mathbf{A}_s è la matrice $p \times q$ contenente i vettori risposta dell'array ai q interferenti. In genere risulta essere priva di struttura. Si suppone inoltre che sia $q < p$.

\mathbf{R}_s è la matrice di correlazione delle interferenze e ha dimensioni $q \times q$.

$\sigma^2\mathbf{I}$ è la matrice di covarianza del rumore che per semplicità può essere ipotizzato bianco, indipendente e identicamente distribuito. La potenza del rumore σ^2 è spesso un valore ben noto.

\mathbf{A}_s e \mathbf{R}_s in genere sono stazionarie solo su intervalli di tempo molto brevi (dell'ordine dei $10ms$) mentre $\|\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}^H\|$, cioè la potenza osservata delle sorgenti astronomiche, è almeno due ordini di grandezza più piccola di σ^2 , ed almeno allo scopo dell'*RFI detection* può essere ignorata. Al contrario, $\|\mathbf{A}_s\mathbf{R}_s\mathbf{A}_s^H\|$ può essere di livello comparabile.

6.7 RFI Detection

6.7.1 Introduzione al problema

Idealmente, l'uscita del processo di correlazione produce una stima di \mathbf{ABA}^H ogni NT secondi, con N numero di campioni e $T = 1/f_s$ periodo di campionamento (ad es. $NT = 10s$):

$$\widehat{R}_f^{10s}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{x}_f(t + nT) \mathbf{x}_f^H(t + nT), \quad NT = 10s \quad (6.51)$$

come si è visto, queste stime sono corrotte dalle interferenze, dal rumore additivo di sistema e dai guadagni ignoti delle antenne. L'obiettivo dell'RFI detection è aumentare il *rapporto segnale/(interferenza + noise)* (SINR) all'uscita degli integratori, cioè su un tempo ad esempio di $10s$. Interferenze stazionarie su quest'ordine di tempo possono essere trattate anche *off-line*. In questo paragrafo, si considerano invece i problemi dell'RFI detection e degli schemi di soppressione *on-line*, supponendo la stazionarietà a livello dei millisecondi o meno.

Esistono diversi schemi di detection e questi differiscono a seconda delle ipotesi che possono essere assunte sui segnali interferenti. Ad esempio, se si conosce la forma d'onda del segnale interferente, allora il rivelatore ottimo coincide con il *filtro adattato* a tale forma d'onda. Anche se la forma d'onda è nota solo in alcuni suoi parametri (come ampiezza, fase o frequenza) sono ancora possibili versioni *estese* dello stesso filtro (*filtro adattato generalizzato*). Tuttavia, solitamente il segnale è modulato da un messaggio e quindi la sua forma d'onda non è nota a priori.

Le tecniche di detection si dividono in due classi: metodi di rilevamento più o meno *deterministici* che esplorano proprietà *note* dei segnali (come il tipo di modulazione o la periodicità) e metodi basati su modelli statistici che fanno uso di parametri *ignoti*, che portano generalmente a test di rapporto di verosimiglianza (GLRT⁹), di cui il *power detection* ne costituisce un valido esempio.

In linea di principio, si può affermare che le interferenze *man-made* abbiano una statistica differente da quella delle sorgenti astronomiche. Sebbene questa sia una caratteristica positiva, non è facile utilizzare questa proprietà per il rilevamento e la soppressione delle RFI, dal momento che i lunghi periodi di integrazione ed il *teorema limite centrale* tendono a *gaussianizzare* gli interferenti, ovvero a rendere le distribuzioni statistiche dei segnali sempre più prossime a delle gaussiane. Per forti interferenti a banda stretta, questo metodo riesce a fornire una soppressione migliore a spese però di un maggiore carico computazionale.

Un'altra distinzione tra segnali interferenti e segnali astronomici viene fornita dai rispettivi steering vectors \mathbf{a} . I segnali astronomici entrano attraverso il main beam del radiotelescopio e producono una risposta ben strutturata (praticamente nota) nell'array, la quale viene poi sfruttata per la procedura di imaging. Le interferenze invece, solitamente entrano dai lobi secondari e se sono in campo vicino, generano vettori \mathbf{a} non strutturati. Inoltre, la loro posizione relativamente all'array non è correlata

⁹Generalized Likelihood Ratio Test.

con il moto della Terra: se l'array insegue una regione fissa nel cielo che si muove al ruotare della Terra, il vettore \mathbf{a} associato all'interferenza sarà tipicamente tempo-variante.

Tra tutte le possibili soluzioni al problema dell'RFI detection, qui vengono considerati due schemi che possono essere ritenuti fondamentali:

1. *Rilevamento e soppressione multicanale*: l'interferenza viene rilevata a brevi intervalli di tempo (ms) ed i campioni contaminati vengono rimossi dal processo di integrazione espresso dalla formula 6.51. Questo meccanismo funzionerà bene fintanto che l'interferenza risulterà concentrata in tempo e frequenza, come ad esempio avviene per i segnali prodotti dai sistemi GSM.
2. *Filtraggio spaziale*: questo schema è certamente più ambizioso del precedente ma può risultare particolarmente interessante qualora si abbia a che fare con interferenze continuamente presenti, come ad esempio quelle prodotte dai ripetitori TV. Dopo il rilevamento, viene stimato il vettore \mathbf{a} associato all'interferente e viene rimossa quella dimensione dallo spazio dei segnali, oppure viene sottratto il segnale proveniente da quella direzione (paragrafo 6.8).

Se lo scopo dell'osservazione astronomica è semplicemente il *power detection*, è sufficiente guardare le matrici di correlazione basate su dati osservati in una finestra a breve termine di lunghezza MT , con $MT \approx 10ms$:

$$\hat{R}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{x}_f(t_k + mT) \mathbf{x}_f^H(t_k + mT), \quad t_k = 0, MT, 2MT, \dots \quad (6.52)$$

Se viene rilevata un'interferenza nella finestra di analisi, essa viene scartata, altrimenti il dato viene accettato e la matrice di correlazione viene usata per ricavare una stima pulita di $\hat{\mathbf{R}}_f^{10s}(t)$. Chiaramente, sono possibili diverse varianti a questo schema, come l'uso di finestre scorrevoli o lo scarto dei dati vicini a quelli contaminati.

6.7.2 Rivelatore *single-channel*

La teoria dell'RFI detection si basa sul test di ipotesi:

H_0 : non vi è alcuna interferenza.

H_1 : vi è almeno un'interferenza in banda.

L'implementazione di questo test dipende dal modello proposto per l'interferenza. Dapprima viene considerato qualche caso semplice che consenta di ottenere espressioni in forma chiusa per i risultati. Successivamente verranno illustrati i metodi per fronteggiare situazioni più complicate e dunque più realistiche.

Pertanto, si consideri in primo luogo il caso che preveda l'utilizzo di un solo sensore (rivelatore *single-channel*) e si supponga che vi sia un singolo segnale interferente, costituito da rumore Gaussiano indipendente ed identicamente distribuito con potenza σ_s^2 non nota. Il rumore di fondo sia anch'esso Gaussiano bianco con potenza σ^2 nota.

In assenza dell'interferenza, i campioni osservati $x_m \equiv x(t_m)$ saranno valori complessi normalmente distribuiti ($\sim CN$), a media nulla e varianza σ^2 . In presenza dell'interferenza, questa distribuzione sarà ancora normale complessa, ma con varianza $\sigma_s^2 + \sigma^2$. Pertanto, si verificano le ipotesi:

$$\begin{aligned} H_0 : x_m &\sim CN(0, \sigma^2) \\ H_1 : x_m &\sim CN(0, \sigma_s^2 + \sigma^2), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (6.53)$$

Si supponga di disporre di M campioni $\{x_m\}$, raccolti in un vettore $x = [x_1, x_2, \dots, x_M]^T$; si tratta di un problema standard nella teoria della rivelazione ([31]): il criterio di Neyman-Pearson sceglie H_1 , se il rapporto di verosimiglianza:

$$L(x) = \frac{p(\mathbf{x}; H_1)}{p(\mathbf{x}; H_0)} \quad (6.54)$$

supera un valore di soglia prefissato, dove $p(\mathbf{x}; H)$ denota la funzione densità di probabilità di \mathbf{x} sotto l'ipotesi H . È risaputo che tale criterio porta ad una probabilità di rivelazione ottimale, per una data probabilità di falso allarme (rilevazione di una RFI quando in realtà non ve ne sono).

Nel caso in esame, basato sul modello 6.53, il criterio di Neyman-Pearson si semplifica nel confronto della potenza totale ricevuta rispetto una certa soglia γ , decidendo H_1 se:

$$T(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{\sigma^2} \sum_{m=0}^{M-1} |x_m|^2 > \gamma \quad (6.55)$$

Nelle condizioni esposte sopra, è possibile ricavare delle espressioni in forma chiusa per la probabilità di falso allarme (P_{FA}) e la probabilità di detection corretta (P_D). Per far ciò, si ricorda che la somma dei quadrati di M variabili Gaussiani reali, i.i.d. a media nulla e varianza unitaria ha una distribuzione χ^2 ad M gradi di libertà¹⁰. Dal momento che si hanno campioni complessi, $T(\mathbf{x})$ è la somma dei quadrati di $2M$ variabili reali. Sotto H_0 queste hanno varianza $1/2$ e quindi la probabilità di falso allarme è data da

$$P_{FA} \equiv P\{T(\mathbf{x}) > \gamma; H_0\} = Q_{\chi_{2M}^2}(2\gamma) \quad (6.56)$$

dove $Q_{\chi_{2M}^2}(\gamma)$ è la probabilità di coda di una variabile casuale di tipo χ^2 con $2M^{2M}$ gradi di libertà. Fortunatamente per questa si ha un'espressione in forma chiusa (vedi [31]):

¹⁰Si veda ad esempio: A. Papoulis, Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, McGrawHill, New York, 3 edition, 1991.

$$Q_{\chi_{2M}^2}(2\gamma) = e^{-\gamma} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{\gamma^k}{k!} \quad (6.57)$$

La sua funzione inversa è nota e consente di scegliere γ per avere una certa probabilità di falso allarme. Similmente, la probabilità di detection di un'interferenza per tale soglia γ è data da:

$$\begin{aligned} P_D &\equiv P\{T(\mathbf{x}) > \gamma; H_1\} = P\left\{\frac{1}{\sigma^2} \sum_{m=1}^M |x_m|^2 > \gamma; H_1\right\} = \\ &= P\left\{\frac{2}{\sigma^2 + \sigma_s^2} \sum_{m=1}^M |x_m|^2 > \frac{2\gamma}{1 + \sigma_s^2/\sigma^2}; H_1\right\} = Q_{\chi_{2M}^2}\left(\frac{2\gamma}{1 + INR}\right) \end{aligned} \quad (6.58)$$

dove $INR = \sigma_s^2/\sigma^2$ è il rapporto interferenza/rumore.

6.7.3 Rivelatore *multi-channel* con risposta spaziale nota

È possibile un miglioramento significativo delle prestazioni del rivelatore qualora si ricorra a tutti i sensori dell'array (rivelatore *multi-channel*). Per illustrare questo meccanismo, si supponga nuovamente il caso semplice con al più un singolo interferente Gaussiano a banda stretta, con risposta spaziale nota \mathbf{a} in rumore additivo bianco Gaussiano. La potenza della sorgente dell'interferenza venga indicata con σ_s^2 ; per normalizzare il guadagno del ricevitore si ponga:

$$\|\mathbf{a}\|^2 \equiv \mathbf{a}^H \mathbf{a} = p \quad (6.59)$$

dove p è il numero di canali (o *sensori*).

In assenza di interferenza, i vettori dei dati \mathbf{x}_m sono distribuiti secondo una normale complessa a media nulla e matrice di covarianza $\sigma^2 \mathbf{I}$.

In presenza del singolo interferente, la matrice di covarianza diventa:

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^H] = \sigma_s^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (6.60)$$

Pertanto, il test di ipotesi:

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbf{x}_m &\sim CN(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \\ H_1 : \mathbf{x}_m &\sim CN(0, \sigma_s^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H + \sigma^2 \mathbf{I}), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (6.61)$$

Il criterio di Neyman-Pearson basato sulla matrice dei dati $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_M]$ utilizza lo stimatore della matrice di covarianza dei dati

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{x}_m \mathbf{x}_m^H \quad (6.62)$$

ed è dato dalla seguenti condizioni (vedi [31]):

$$T(\mathbf{X}) \equiv \frac{1}{\sigma^2/M} \frac{\mathbf{a}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{a}} > \gamma \rightarrow H_1 \quad (6.63)$$

$$T(\mathbf{X}) \equiv \frac{1}{\sigma^2/M} \frac{\mathbf{a}^H \widehat{\mathbf{R}} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{a}} < \gamma \rightarrow H_0$$

Questo test equivale ad un rivelatore a *filtro spaziale adattato*; essenzialmente, confronta l'energia dell'interferente ricevuta in direzione \mathbf{a} con σ^2 . Se chiamiamo y_m l'uscita di un beamformer adattato in direzione di \mathbf{x}_m :

$$y_m = \frac{\mathbf{a}^H}{\|\mathbf{a}\|} \mathbf{x}_m \quad (6.64)$$

allora il test di ipotesi diviene:

$$\begin{aligned} H_0 : y_m &\sim CN(0, \sigma^2) \\ H_1 : y_m &\sim CN(0, p\sigma_s^2 + \sigma^2), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned} \quad (6.65)$$

e si vede che prendendo la stessa soglia del caso *single-channel* fornisce la stessa probabilità di falso allarme:

$$P_{FA} \equiv P\{T(\mathbf{X}) > \gamma; H_0\} = Q_{\chi_{2M}^2}(2\gamma) \quad (6.66)$$

ma la probabilità di detection ora è migliorata notevolmente, essendo data da:

$$P_D \equiv P\{T(\mathbf{X}) > \gamma; H_1\} = Q_{\chi_{2M}^2} \left(\frac{2\gamma}{1 + pINR} \right) \quad (6.67)$$

Le prestazioni fornite da questo rivelatore sono decisamente superiori a quelle del rivelatore *single-channel*.

6.7.4 Analisi agli autovalori

Fino a questo punto, il problema dell'RFI detection è stato interpretato da un punto di vista piuttosto *ideale*: al più un solo interferente con vettore spaziale \mathbf{a} noto. Il motivo di questa semplificazione sta nel fatto che per questo caso, è possibile ricavare dei rivelatori ottimali le cui prestazioni sono esprimibili in forma chiusa. Ora verrà effettuata un'estensione a situazioni più pratiche.

L'obiettivo dell'RFI detection è rilevare la presenza di un interferente a partire dai dati di osservazione prodotti dai correlatori. Per cominciare, si consideri dapprima la matrice di covarianza dovuta a q interferenti *in assenza di rumore*:

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_s \mathbf{R}_s \mathbf{A}_s^H \quad (6.68)$$

dove \mathbf{R} ha dimensione $p \times p$, \mathbf{A}_s ha dimensioni $p \times q$ ed \mathbf{R}_s ha dimensioni $q \times q$. Per un basso numero di interferenti q , è possibile ricorrere a concetti già noti della teoria sugli array ed impiegare tecniche d'analisi basate sui sottospazi vettoriali, di cui a seguito ne viene fornita solo una breve introduzione¹¹.

Se $q < p$, allora il rango di \mathbf{R} è q dal momento che \mathbf{A}_s ha solo q colonne. Pertanto, è possibile stimare il numero di interferenti (a banda stretta) presenti dal calcolo del rango della matrice di covarianza. Tale valore è stimabile anche mediante un'analisi agli autovalori. Infatti, sia

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \quad (6.69)$$

una scomposizione ai valori singolari (SVD¹²) di \mathbf{R} , dove \mathbf{U} di dimensioni $p \times p$ è una matrice unitaria (cioè si ha $\mathbf{U} \mathbf{U}^H = \mathbf{I}$ e $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}$) che contiene gli autovettori di \mathbf{R} mentre la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ di dimensioni $p \times p$ ne contiene gli autovalori corrispondenti, ordinati dal più grande al più piccolo:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0 \quad (6.70)$$

Dal momento che il rango è q , si avranno solo q autovalori non nulli. È possibile raccogliere questi in una matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}_s$ di dimensioni $q \times q$ e i corrispondenti autovettori in una matrice \mathbf{U}_s di dimensioni $p \times q$, cosicchè si abbia

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H \quad (6.71)$$

I restanti $p - q$ autovettori possono essere raccolti in una matrice \mathbf{U}_n e sono ortogonali a \mathbf{U}_s dal momento che $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n]$ è unitaria. Il sottospazio descritto dalle colonne di \mathbf{U}_s è detto *sottospazio del segnale* mentre il complemento ortogonale descritto dalle colonne di \mathbf{U}_n rappresenta il *sottospazio del rumore*.

Quindi, nel caso di rumore assente, si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix} \quad (6.72)$$

In presenza di rumore bianco invece, si ha

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}_s \mathbf{R}_s \mathbf{A}_s^H + \sigma^2 \mathbf{I}_p \quad (6.73)$$

¹¹Per un'esposizione approfondita si veda: Krim, H. & Viberg, M. 1996, IEEE Signal Processing Magazine, 13, 67.

¹²Singular Value Decomposition.

In questo caso, \mathbf{R} ha rango massimo: il suo valore è sempre p . Tuttavia, è ancora possibile rilevare il numero di interferenti studiando gli autovalori di \mathbf{R} . Infatti la scomposizione ai valori singolari (espressa in termini della 6.71, ricordando che $\mathbf{U} = [\mathbf{U}_s \mathbf{U}_n]$ è unitaria: $\mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{I}_p$) è ricavata come:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{A}_s \mathbf{R}_s \mathbf{A}_s^H + \sigma^2 \mathbf{I}_p = \mathbf{U}_s \mathbf{\Lambda}_s \mathbf{U}_s^H + \sigma^2 (\mathbf{U}_s \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H) = \\ &= \mathbf{U}_s (\mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_q) \mathbf{U}_s^H + \mathbf{U}_n (\sigma^2 \mathbf{I}_{p-q}) \mathbf{U}_n^H = \\ &= [\mathbf{U}_s \ \mathbf{U}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_s + \sigma^2 \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma^2 \mathbf{I}_{p-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_s^H \\ \mathbf{U}_n^H \end{bmatrix} \equiv \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H \end{aligned} \quad (6.74)$$

Quindi \mathbf{R} ha $p - q$ autovalori pari a σ^2 e q che sono maggiori di σ^2 . Pertanto, è possibile rilevare il numero q degli interferenti confrontando gli autovalori di \mathbf{R} con una soglia data da σ^2 .

Un'interpretazione fisica della scomposizione ai valori singolari è la seguente. Gli autovettori forniscono un insieme ortogonale di *direzioni spaziali* presenti nella matrice di covarianza, ordinate per importanza. Gli autovalori danno la potenza del segnale proveniente dalle direzioni corrispondenti ovvero la potenza all'uscita del beamformer adattato a quella direzione. Infatti, sia \mathbf{u}_i l' i -esimo autovettore, allora la potenza in uscita sarà

$$\mathbf{u}_i^H \mathbf{R} \mathbf{u}_i = \lambda_i \quad (6.75)$$

Il primo autovettore, \mathbf{u}_1 punta sempre nella direzione da cui proviene maggiore energia. Il secondo, \mathbf{u}_2 , punta in una direzione ortogonale a \mathbf{u}_1 , dalla quale proviene la maggior parte dell'energia residua e così via.

Se non vi è interferenza ma solo rumore, allora non vi è una direzione preferenziale, e tutti gli autovalori sono uguali alla potenza di rumore.

Se vi è un singolo interferente con potenza σ_s^2 e direzione spaziale \mathbf{a} , normalizzata al valore $\|\mathbf{a}\|^2 = p$, la matrice di covarianza vale:

$$\mathbf{R} = \sigma_s^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (6.76)$$

Dalla precedente segue che c'è solo un autovalore maggiore di σ^2 . L'autovettore corrispondente è:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} \frac{1}{\|\mathbf{a}\|} \quad (6.77)$$

e punta in direzione di \mathbf{a} , mentre la potenza proveniente da quella direzione vale:

$$\lambda_1 = \mathbf{u}_1^H \mathbf{R} \mathbf{u}_1 = p \sigma_s^2 + \sigma^2 \quad (6.78)$$

Dal momento che vi è un solo interferente, la potenza proveniente da ogni altra direzione ortogonale a \mathbf{a}_1 è σ^2 , cioè pari alla potenza di rumore.

Si osservi il legame con il test statistico del paragrafo precedente, dove si è supposto che \mathbf{a} fosse noto. Dal momento che $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} \frac{1}{\|\mathbf{a}\|}$, si ha

$$\frac{\mathbf{a}^H \mathbf{R} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^H \mathbf{a}} = \frac{\mathbf{u}_1^H \mathbf{R} \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^H \mathbf{u}_1} = \lambda_1 \quad (6.79)$$

Pertanto il test descritto nel paragrafo precedente si riduce a misurare l'autovalore dominante di \mathbf{R} , e la conoscenza di \mathbf{a} di fatto non è necessaria.

Con più di un interferente, questo meccanismo può essere generalizzato. Si supponga che vi siano 2 interferenti con potenze σ_1^2 e σ_2^2 e direzioni spaziali \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 . Se le direzioni spaziali sono ortogonali ($\mathbf{a}_1^H \mathbf{a}_2 = 0$), allora \mathbf{u}_1 sarà in direzione dell'interferente di maggiore intensità, (la 1 ad esempio), e λ_1 sarà la potenza corrispondente: $\lambda_1 = p\sigma_1^2 + \sigma^2$. Analogamente, si avrà $\lambda_2 = p\sigma_2^2 + \sigma^2$.

In genere, le direzioni spaziali non sono ortogonali tra loro. In tal caso, \mathbf{u}_1 punterà nella direzione comune ad \mathbf{a}_1 ed \mathbf{a}_2 , mentre \mathbf{u}_2 punterà nella direzione rimanente, ortogonale ad \mathbf{u}_1 . La potenza λ_1 proveniente dalla direzione \mathbf{u}_1 sarà maggiore di prima perchè combinazione della potenza potenza di entrambi gli interferenti, mentre λ_2 sarà minore.

Ma le scomposizioni ai valori singolari (6.74) mostra ben più del numero di interferenti. Infatti, *le colonne di \mathbf{U}_s esplorano lo stesso sottospazio delle colonne di \mathbf{A}_s* . Questo è ovvio nel caso di rumore assente (eq. 6.71), ma la scomposizione 6.74 mostra che gli autovettori contenuti in \mathbf{U}_s e \mathbf{U}_n , rispettivamente, sono gli stessi del caso di assenza di rumore. Pertanto, si ha che:

$$\text{spazio}(\mathbf{U}_s) = \text{spazio}(\mathbf{A}_s), \quad \mathbf{U}_n^H \mathbf{A}_s = 0 \quad (6.80)$$

Ricapitolando, data una certa stima $\hat{\mathbf{R}}$ della matrice di correlazione ottenuta a partire dai dati osservati, viene dapprima calcolata la sua scomposizione ai valori singolari. Da questa è poi possibile stimare il rango q determinando numero di autovalori maggiori di σ^2 ed è possibile determinare \mathbf{U}_s e quindi il sottospazio esplorato dalle colonne di \mathbf{A}_s . Sebbene non sia possibile identificare direttamente ogni singola colonna di \mathbf{A}_s , la stima del suo sottospazio può essere usata per filtrare l'interferenza - tale algoritmo viene descritto nel paragrafo 6.8. Nel caso di rumore colorato è possibile ricondursi al caso di rumore bianco (*sbiancamento*) purchè sia nota la densità spettrale di potenza del rumore stesso.

6.7.5 Rivelatore *multi-channel* con risposte spaziali ignote

Nel caso si abbia solo una stima $\hat{\mathbf{R}}$ basata su un numero finito di campioni M e i vettori a dell'interferenza non siano noti a priori, non è possibile ottenere dei risultati ottimali. L'analisi alle componenti principali suggeriva di confrontare gli autovalori con una certa soglia definita da σ^2 : in

assenza di interferenze, tutti gli autovalori sono asintoticamente pari a σ^2 .

In questo paragrafo vengono discussi due rivelatori, uno valido per il caso in cui σ^2 sia noto ed uno per il caso contrario.

Nel caso che sia nota a priori la potenza di rumore σ^2 , è possibile applicare un test di rapporto di verosimiglianza, il quale porta ad un metodo che si deve a Box (1949) per verificare l'ipotesi nulla:

$$H_o : \sigma^{-2} \hat{\mathbf{R}} = \mathbf{I} \quad (6.81)$$

ovvero che non vi siano interferenze. Il termine del test è il seguente:

$$T(\mathbf{X}) \equiv -Mp \log \prod_{i=1}^p \frac{\hat{\lambda}_i}{\sigma^2} \quad (6.82)$$

dove $\hat{\lambda}_i$ è l' i -esimo autovalore di $\hat{\mathbf{R}}$. L'interferenza viene ritenuta presente se:

$$T(\mathbf{X}) > \gamma \quad (6.83)$$

Essenzialmente si tratta di verificare se tutti gli autovalori sono pari a σ^2 , con un certo intervallo di confidenza. Nel caso di interferenze assenti, si può dimostrare che:

$$T(\mathbf{X}) \sim \chi_{(p+1)(p-2)}^2 \quad (6.84)$$

il che consente di calcolare il valore da attribuire a γ per avere una certa probabilità di falso allarme.

Se anche la potenza del rumore è ignota, si propone di utilizzare il rivelatore *Minimum Description Length* (MDL) proposto da Wax e Kailath nel 1985¹³. In questo caso, piuttosto che scegliere una soglia sulla base della distribuzione asintotica di probabilità del test di verosimiglianza, si ricerca l'ordine minimo del modello statistico. In altre parole lo stimatore MDL è dato da:

$$\hat{q} = \arg \min_n MDL(n) \quad (6.85)$$

dove

$$MDL(n) = -(p-n)M \log \frac{(\prod_{i=n+1}^p \hat{\lambda}_i)^{1/(p-n)}}{1/(p-n) \sum_{i=n+1}^p \hat{\lambda}_i} + \frac{1}{2}n(2p-n+1) \log M \quad (6.86)$$

In questo caso, l'interferenza si giudica presente se $\hat{q} \neq 0$.

¹³Wax, M., & Kailath, T. 1985, IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing, 33, 387.

Il primo termine essenzialmente verifica se la media geometrica degli ultimi $p - n$ autovalori (quelli minori) è pari alla media aritmetica, il che è vero solo quando tali autovalori sono eguali. Il secondo termine è un fattore correttivo che cresce con il numero di parametri incogniti da stimare. Si osservi inoltre che la media aritmetica degli autovalori minori è una stima della varianza di rumore, cosicché nel caso di verifica di $n = 0$, il primo termine del rivelatore MDL si riduce ad un campione $T(\mathbf{x})$ della 6.82.

Questo stimatore di rango ha il vantaggio di essere semplice da implementare dal momento che è indipendente dalle variazioni del $SINR$ che avvengono all'interno del sistema. Uno svantaggio è che la probabilità di falso allarme non è nota e non viene fissata a priori.

Infine, si osserva che una semplice opzione utilizzabile per limitare la probabilità di falso allarme consiste nel raccogliere un certo numero di blocchi di dati da elaborare, ordinarli secondo il valore di $T(\mathbf{x})$ definito dalla 6.82 e scartarne una certa percentuale che abbia un valore elevato. Concettualmente si tratta di un meccanismo semplice ma in pratica richiede un grosso quantitativo di memoria.

6.8 Filtraggio a proiezione spaziale

Si supponga di aver ricavato una certa matrice di covarianza \mathbf{R} , composta contributo dovuto alle radiosorgenti astronomiche \mathbf{R}_v e dal contributo di rumore $\sigma^2\mathbf{I}$. Si supponga inoltre che vi sia un certo segnale interferente a potenza σ_s^2 :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_v + \sigma_s^2 \mathbf{a}\mathbf{a}^H + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (6.87)$$

Nei paragrafi precedenti, sono stati illustrati dei possibili schemi per rilevare dagli autovalori di $\hat{\mathbf{R}}$ (una stima a breve termine di \mathbf{R}) la presenza di possibili interferenze. Dopo la rivelazione, si è proposto di escludere $\hat{\mathbf{R}}$ da una media a lungo periodo qualora essa risulti essere contaminata. Ma *come procedere qualora l'interferenza risulti essere sempre presente?* In tal caso, risulta più interessante un tentativo mirato a sopprimere il contributo, $\sigma_s^2 \mathbf{a}\mathbf{a}^H$. Questo problema conduce al *metodo delle proiezioni a sottospazi*¹⁴.

6.8.1 Metodo delle proiezioni a sottospazi

Un prima forma di filtraggio spaziale consiste nell'annullare tutta l'energia proveniente da certa direzione spaziale \mathbf{a} . A tale scopo si introduce la *matrice di proiezione*¹⁵, di dimensioni $p \times p$:

$$\mathbf{P}_a^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{a}(\mathbf{a}^H \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}^H \quad (6.88)$$

¹⁴SSP, SubSpace Projection Method.

¹⁵ \mathbf{P}_a^\perp è una matrice di proiezione perchè $\mathbf{P}_a^\perp \mathbf{P}_a^\perp = \mathbf{P}_a^\perp$.

Si verifica facilmente che $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \mathbf{a} = 0$: ciò significa che questa direzione spaziale viene eliminata mediante la proiezione.

Se con $\tilde{\mathbf{R}}$ si indica la matrice di covarianza filtrata mediante $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp$, si ottiene:

$$\tilde{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \mathbf{R} \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp = \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \mathbf{R}_v \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp + \sigma^2 \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \quad (6.89)$$

Pertanto, la proiezione rimuove l'interferenza. Allo stesso tempo però, la matrice di visibilità viene alterata ed il rumore non risulta più bianco, dal momento che viene a mancare una dimensione¹⁶.

In genere, il vettore \mathbf{a} non è noto a priori. Tuttavia, si osservi che per l'eliminazione non è necessario conoscere \mathbf{a} ma è sufficiente disporre di una matrice di proiezione. Si riprenda dall'equazione 6.74 la scomposizione alle componenti principali di \mathbf{R} , ed in particolare la matrice \mathbf{U}_n contenente una base ortonormale del *sottospazio di rumore*, che è il complemento ortogonale di \mathbf{a} , con $p-1$ colonne. In accordo con l'equazione 6.80, si ha:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{a} = 0 \quad (6.90)$$

Ora è immediato verificare che

$$\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (6.91)$$

Infatti, dal momento che:

$$\mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_n = \mathbf{I}_{p-1} \quad (6.92)$$

si ha che:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H = \mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \quad (6.93)$$

e che:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{a}}^\perp \mathbf{a} = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \mathbf{a} = 0 \quad (6.94)$$

Pertanto è possibile ricavare la matrice di proiezione richiesta senza conoscere \mathbf{a} , semplicemente calcolando l'SVD di \mathbf{R} .

L'equazione 6.91 può essere estesa immediatamente al caso più generale di $q < p$ interferenti con vettori \mathbf{a} ignoti. In tal caso, la proiezione sul complemento della matrice \mathbf{A}_s dell'interferenza è data da:

¹⁶La fase di imaging deve tener conto di questo fatto: non esiste più una semplice relazione di trasformata di Fourier tra le funzioni di visibilità e la distribuzione di brillantezza celeste (Si consulti a tal proposito [28]).

$$\mathbf{P}_{\mathbf{A}_s}^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{A}_s(\mathbf{A}_s^H \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{A}_s^H = \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n^H \quad (6.95)$$

Dunque anche in questo caso non occorre conoscere \mathbf{A}_s : il sottospazio di rumore viene stimato ancora una volta tramite l'SVD di \mathbf{R} . Ciò si basa sul fatto che la covarianza di rumore è bianca (in genere nota), e la matrice di visibilità \mathbf{R}_v non contiene informazioni rilevanti per brevi tempi di osservazione (diversamente, la scomposizione ai valori singolari potrebbe venirne alterata).

Come alternativa all'equazione 6.89, è possibile definire un'altra matrice di covarianza filtrata:

$$\tilde{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{U}_n^H \mathbf{R} \mathbf{U}_n = \mathbf{U}_n^H \mathbf{R}_v \mathbf{U}_n + \sigma^2 \mathbf{I}_{p-q} \quad (6.96)$$

dove sono state utilizzate le relazioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_n &\perp \mathbf{A}_s \\ \mathbf{U}_n^H \mathbf{U}_n &= \mathbf{I}_{p-q} \end{aligned} \quad (6.97)$$

In questo caso, $\tilde{\mathbf{R}}$ ha dimensioni $(p - q) \times (p - q)$ e sebbene più piccola, questa matrice contiene le stesse informazioni di $\mathbf{P}_a^\perp \mathbf{R} \mathbf{P}_a^\perp$. Al vantaggio di avere una matrice di dimensioni minori, si aggiunge il fatto che con questa trasformazione lineare il rumore resta bianco.

In Fig. 6.13 è riportato un esempio di filtraggio di una matrice di covarianza ($p = 32$ e $q = 3$) utilizzando il metodo delle proiezioni spaziali. Nel primo riquadro viene riportato l'andamento (in scala logaritmica) degli autovalori di \mathbf{R} . Nel secondo riquadro la matrice di covarianza filtrata secondo l'equazione 6.94 (filtraggio *colorante*) mentre nel terzo riquadro quella ottenuta mediante l'equazione 6.97 (filtraggio *non colorante*).

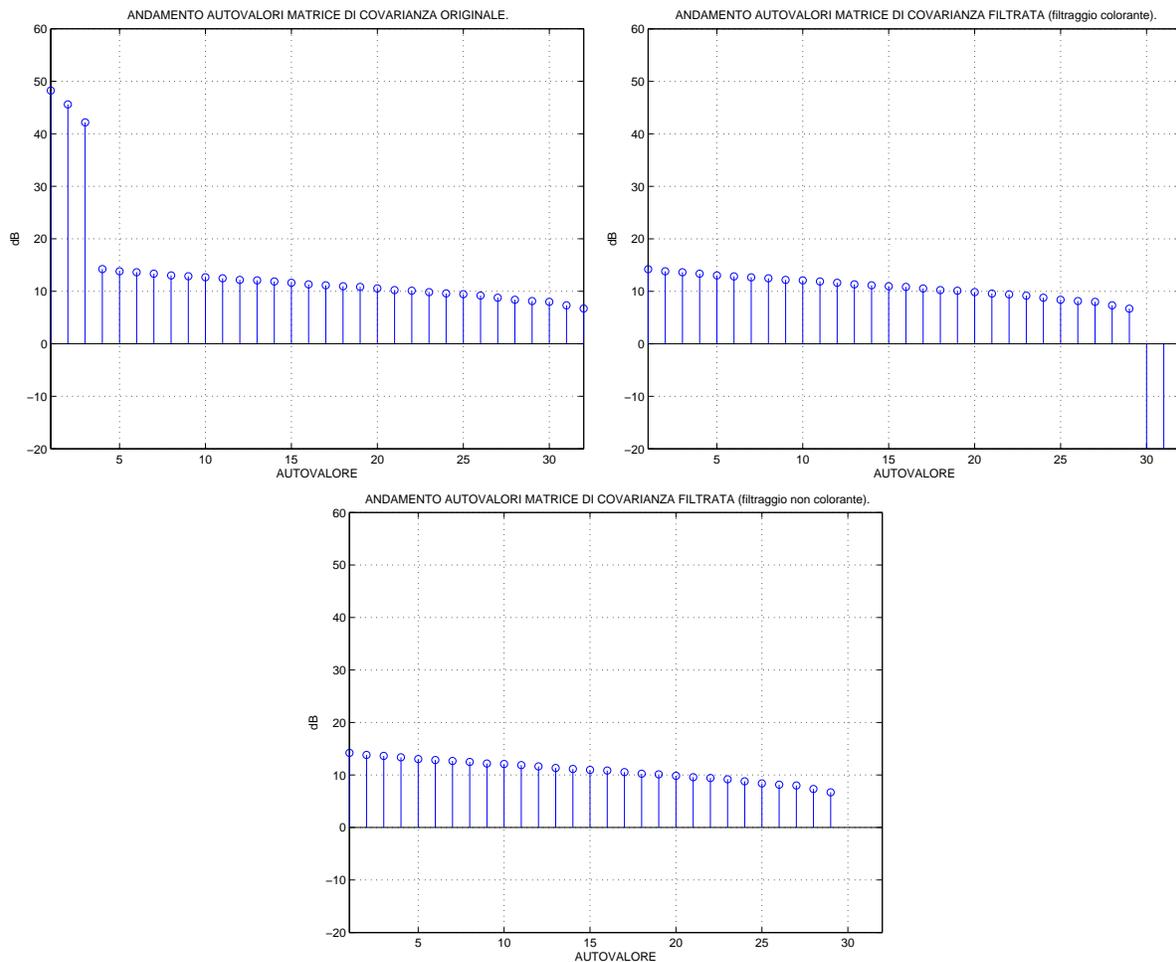


Figura 6.13: Esempio di filtraggio di una matrice di covarianza ($p = 32$ e $q = 3$) utilizzando il metodo delle proiezioni spaziali. Nel primo riquadro viene riportato l'andamento (in scala logaritmica) degli autovalori di \mathbf{R} : Si hanno 32 autovalori di cui i primi 3, associati alle RFI, spiccano in modo particolare. Nel secondo riquadro la matrice di covarianza filtrata secondo l'equazione 6.94 (filtraggio *colorante*): si hanno ancora 32 autovalori di cui solo $p - q = 29$ non nulli. Nel terzo riquadro quella ottenuta mediante l'equazione 6.97 (filtraggio *non colorante*), in cui si hanno solo $p - q = 29$ autovalori non nulli.

Capitolo 7

Calibrazione degli interferometri radioastronomici

Le tecniche di beamforming e di RFI mitigation illustrate nei capitoli precedenti partivano dal presupposto che l'array utilizzato fosse *calibrato*. Essenzialmente, *calibrare un array significa stimare la risposta in ampiezza e fase dei singoli sensori che lo compongono e compensarne le differenze*.

Infatti, per quanto le catene riceventi che compongono l'array possano essere realizzate in modo simile, esistono pur sempre delle piccole differenze che necessitano di essere compensate.

La calibrazione di un interferometro può essere condotta agevolmente qualora si conosca con precisione la posizione della sorgente di segnale e questa possa ritenersi con buona approssimazione in campo lontano.

In questo capitolo verrà illustrata una tecnica di calibrazione applicabile agli interferometri radioastronomici, sviluppata presso la stazione radioastronomica di Medicina, che si basa sull'utilizzo di corpi celesti, particolarmente brillanti e definiti, come sorgenti di segnale di calibrazione.

I risultati riportati non sono frutto di simulazioni ma sono risultati reali ottenuti conducendo delle osservazioni mediante il sistema BEST-1 di una radiosorgente molto forte (Cassiopeia-A).

7.1 Sistemi di riferimento astronomici

Al fine di rendere comprensibile al lettore la procedura di calibrazione, è necessaria una breve introduzione ai sistemi di riferimento adottati dalla radioastronomia (e più in generale dall'astronomia) per misurare lo *spazio* ed il *tempo*. La *meccanica celeste* è una disciplina decisamente complessa e quanto viene esposto a seguito non vuole avere alcuna pretesa di completezza sull'argomento: per approfondimenti al riguardo si rimanda ai testi specialistici citati in bibliografia.

7.1.1 Sistema azimutale (AZ-EL)

Il sistema azimutale (chiamato anche sistema *altazimutale* o sistema *orizzontale*) è un sistema di coordinate astronomiche (Fig. 7.1) in cui si sceglie come direzione fondamentale la verticale (OZ) alla superficie terrestre passante per l'osservatore. I due poli sono lo *zenit* ed il *nadir*, ovvero il punto sulla verticale dell'osservatore ed il punto diametralmente opposto. Il piano fondamentale è il piano dell'orizzonte astronomico. I cerchi ausiliari sono chiamati cerchi verticali o cerchi massimi.

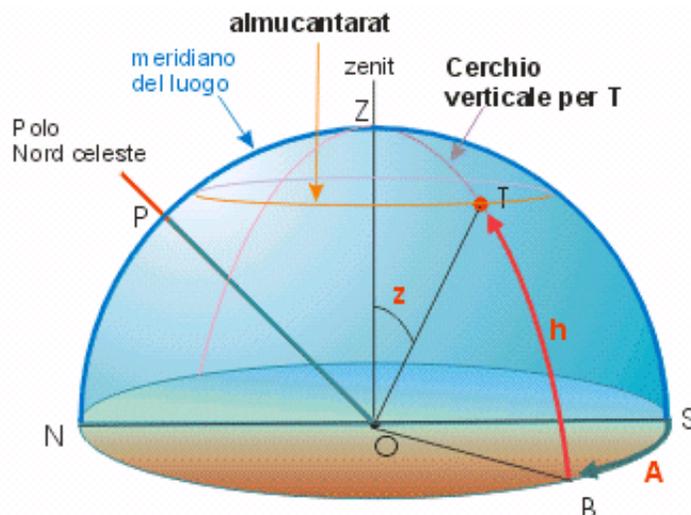


Figura 7.1: Nel sistema azimutale il piano fondamentale è il piano dell'orizzonte astronomico.

Azimut (A): è l'ascissa sferica di un punto sulla sfera celeste. L'azimut del punto T è l'angolo formato dal piano del cerchio verticale passante per T ed il meridiano astronomico del luogo. Si misura in gradi e frazioni di grado, partendo dal punto cardinale sud in senso orario. Esso corrisponde, nel disegno in Fig. 7.1, all'angolo SOB dove O è l'osservatore e B è l'intersezione dell'orizzonte con il cerchio verticale passante per T . E' sempre più diffusa la convenzione (ereditata dall'astronomia nautica) di misurare l'azimut partendo dal punto cardinale nord, in senso orario, da 0° a 360° .

Altezza (h): è l'ordinata sferica di un punto sulla sfera celeste e cioè la sua distanza angolare dall'orizzonte misurata lungo il cerchio massimo passante per quel punto e lo zenit. Si esprime in gradi e frazioni di grado con valore positivo verso lo zenit e negativo verso il nadir. In Fig. 7.1, l'altezza del punto T corrisponde all'angolo TOB dove O è l'osservatore e B è l'intersezione dell'orizzonte con il cerchio verticale passante per T .

L'arco complementare dell'altezza si chiama distanza zenitale e nel disegno di Fig. 7.1 è rappresentata dall'angolo ZOT dove Z è lo zenit dell'osservatore. La distanza zenitale si indica generalmente con z .

Risulta quindi:

$$z = 90^\circ - h \quad (7.1)$$

I punti sulla sfera celeste che hanno uguale altezza formano un cerchio minore detto *almucantarata*.

Nel sistema azimutale entrambe le coordinate (*azimut* e *altezza*) delle stelle variano sensibilmente con il passare del tempo a causa del moto di rotazione della Terra.

7.1.2 Sistema equatoriale (RA-DEC)

E' un sistema di coordinate astronomiche che ha come direzione fondamentale l'asse del pianeta $N - S$ e come piano fondamentale quello dell'equatore celeste¹. I poli del sistema sono i poli celesti nord e sud. I cerchi ausiliari si chiamano cerchi orari o meridiani celesti. I cerchi minori, paralleli all'equatore, si chiamano paralleli celesti.

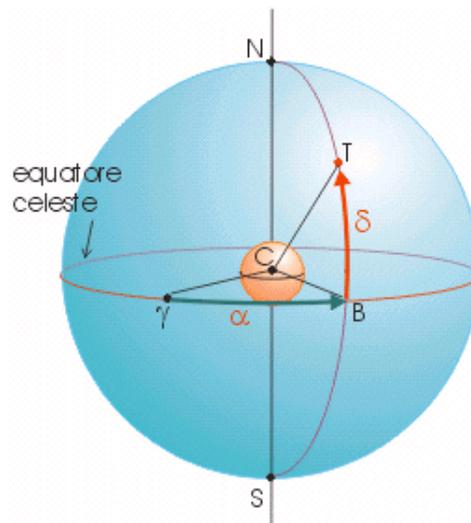


Figura 7.2: Nel sistema equatoriale il piano fondamentale è quello dell'equatore celeste.

Ascensione retta (α o RA): è l'ascissa sferica del sistema equatoriale. L'origine è il punto gamma (γ)². L'ascensione retta si misura di solito in ore, minuti e secondi, lungo l'equatore celeste, partendo dal punto γ e con senso di percorrenza antiorario. Nel grafico di Fig. 7.2 corrisponde

¹L'equatore celeste è la proiezione dell'equatore terrestre sulla sfera celeste.

²L'*eclittica* è un cerchio massimo sulla sfera celeste che corrisponde al percorso apparente del Sole durante l'anno. Questa interseca l'equatore celeste in due punti (*nodi*) chiamati: *punto vernale* (detto anche *punto gamma* (γ) o *punto di Ariete*) che è il nodo ascendente e *punto della Bilancia* (Ω) che è il nodo discendente. Il punto vernale viene scelto come origine dell'ascissa sferica nel sistema equatoriale e come punto di riferimento per il tempo siderale.

all'angolo γCB dove C è il centro della Terra e B l'intersezione del cerchio orario che passa per T con l'equatore celeste.

Declinazione (δ o *DEC*): è l'ordinata sferica di questo sistema. Rappresenta la distanza angolare tra un punto della sfera celeste e l'equatore, misurata lungo il cerchio massimo passante per tale punto e per i poli celesti. Si misura in gradi e frazioni di grado con segno positivo verso il polo nord celeste e negativo verso il polo sud. Nel grafico di Fig. 7.2 la declinazione del punto T corrisponde all'angolo TCB .

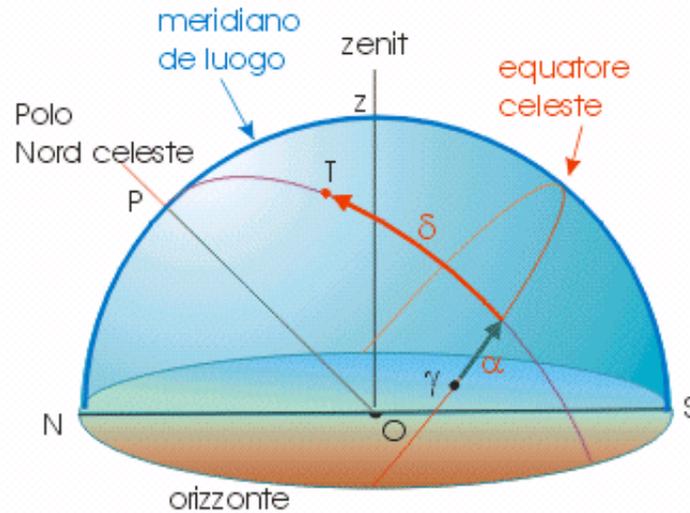


Figura 7.3: La volta celeste nel sistema di riferimento equatoriale.

In Fig. 7.3 viene riprodotta la volta celeste con il sistema di riferimento equatoriale. L'intero sistema di riferimento equatoriale (equatore celeste, asse del mondo, punto γ) partecipa alla rotazione diurna della sfera celeste e quindi *l'ascensione retta e la declinazione di un astro sono praticamente³ costanti nel tempo.*

7.1.3 Giorno siderale

Il giorno siderale è il periodo impiegato dalla Terra per eseguire un'intera rotazione attorno al proprio asse. Il riferimento per definire il giorno siderale non è il Sole bensì la direzione di un punto della sfera celeste considerato fisso in prima approssimazione (il punto γ). Dunque il giorno siderale è l'intervallo di tempo tra due successive culminazioni del punto γ .

Il giorno siderale è più corto del giorno solare di quasi 4 minuti (corrispondenti all'incirca ad 1°). Tale differenza è dovuta al fatto che la Terra, mentre ruota attorno a se stessa, percorre anche un

³In realtà il moto di precessione dell'asse terrestre (con periodo di circa 26000 anni) causa una leggera tempovarianza anche di queste coordinate. Per tale motivo quando si forniscono le coordinate equatoriali di un corpo celeste viene sempre specificata anche la data (*epoca*) alla quale si riferiscono

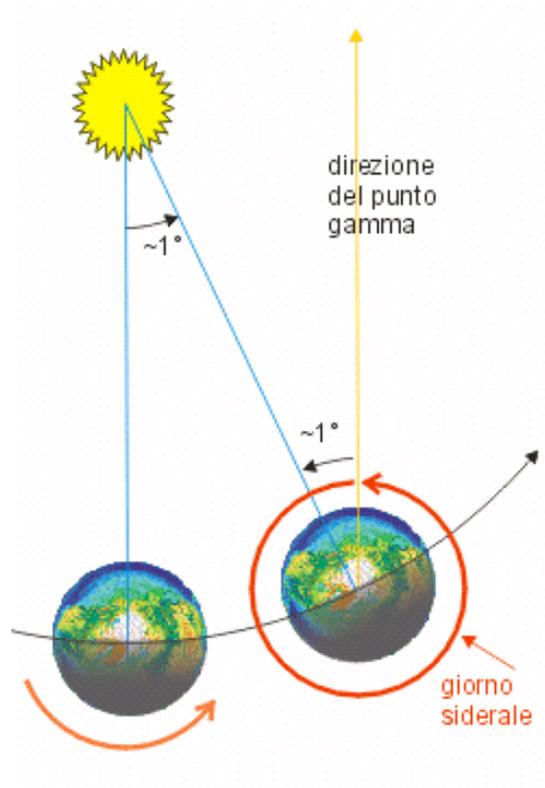


Figura 7.4: Il *giorno siderale* dura circa 4 minuti in meno del *giorno solare* a causa del moto di rivoluzione della Terra attorno al Sole.

tratto di orbita attorno al Sole e quindi il Sole transita al meridiano con 4 minuti di ritardo al giorno rispetto alle altre stelle. Il risultato è il moto apparente annuo del Sole rispetto alle stelle, in senso antiorario per un osservatore boreale, alla velocità di circa $1^\circ/\text{giorno}$. Al concetto di giorno siderale si lega spontaneamente il concetto di *orologio siderale* e dunque di *tempo siderale*.

7.2 PULSAR: un banco di prova per la calibrazione di BEST-1

In Fig. 7.5 viene schematizzato il banco di prova che è stato allestito per effettuare le prove di calibrazione del sistema BEST-1 (Fig. 7.6). Il segnale captato da ciascun sensore⁴ costituente l'array viene dapprima amplificato mediante un amplificatore a basso rumore (LNA). Il segnale amplificato viene poi trasportato nella stanza del ricevitore mediante un link analogico in fibra ottica. I 4 segnali che giungono dall'array vengono così convertiti su una media frequenza di $IF = 30MHz$ con una banda di $BW = 5MHz$, utilizzando un unico oscillatore locale a $f_{LO} = 378MHz$ per tutti e quattro i mixer. I segnali a media frequenza vengono poi equalizzati in ampiezza mediante 4 attenuatori variabili. A loro volta, le 4 IF vengono portate a 3 sotto-sistemi: un *banco total power* che fornisce in uscita le potenze di ciascuno dei quattro segnali, un *banco correlatore* che effettua la correlazione *somma* dei segnali 1 + 3, 1 + 4 e 2 + 4 ed un *banco beamformer*, dotato di 4 sfasatori variabili per la creazione di un unico fascio total power rifasato. Gli stadi *rivelatori* sono realizzati mediante dispositivi a caratteristica quadratica (diodi) mentre gli stadi *integratori* hanno una costante di tempo $\tau \simeq 1s$. Gli ADC campionano il segnale ad una frequenza di $f_c = 1s$. L'operatore ha la facoltà di impostare a sua discrezione gli *attenuatori variabili* e gli *sfasatori variabili*.

7.3 Radiosorgenti utilizzabili per la calibrazione di BEST-1

Una radiosorgente, per essere giudicata idonea ad effettuare delle misure di calibrazione, deve soddisfare a due requisiti fondamentali:

1. Deve essere visibile sotto un angolo di vista sufficientemente ridotto, in rapporto all'apertura del beam del sensore, da potersi considerare praticamente *puntiforme*.
2. Deve possedere una brillantezza sufficientemente elevata rispetto alla sensibilità del radiometro.

Il flusso minimo S_{min} rilevabile si ricava dall'*equazione del radiometro* (vedi ad esempio [1]):

$$S_{min} = \frac{KT_{sys}}{A_{eff}\sqrt{B\tau}} [Wm^{-2}Hz^{-1}] \quad (7.2)$$

⁴Si ricorda che ogni sensore di BEST-1 è costituito da una schiera di 16 dipoli lunghi $\lambda/2$ montati su un riflettore cilindro-parabolico da circa $40m^2$ di area geometrica.

7.3. RADIOSORGENTI UTILIZZABILI PER LA CALIBRAZIONE DI BEST-1219

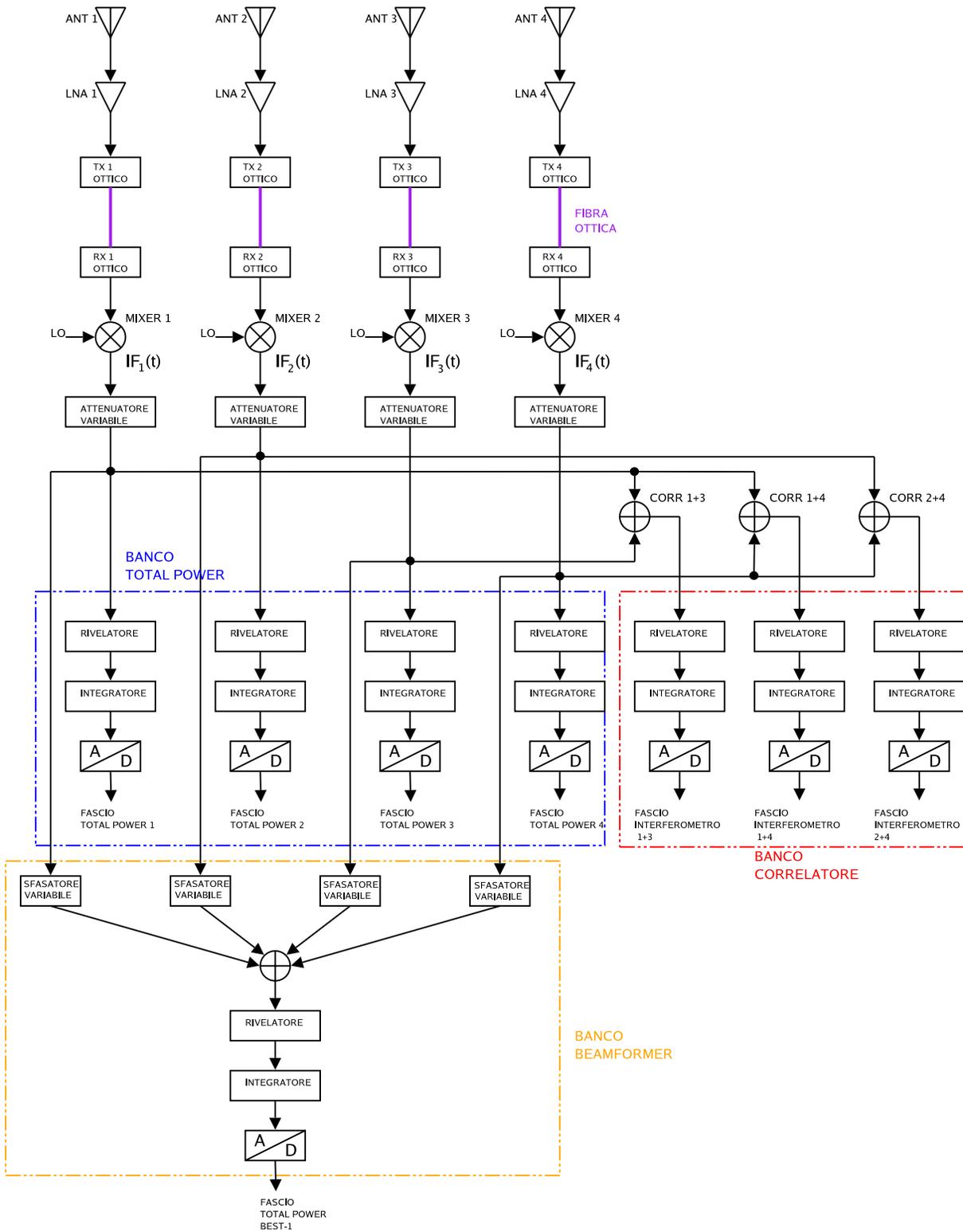


Figura 7.5: Schema semplificato del banco di prova (PULSAR) utilizzato per le prove di calibrazione con BEST-1.

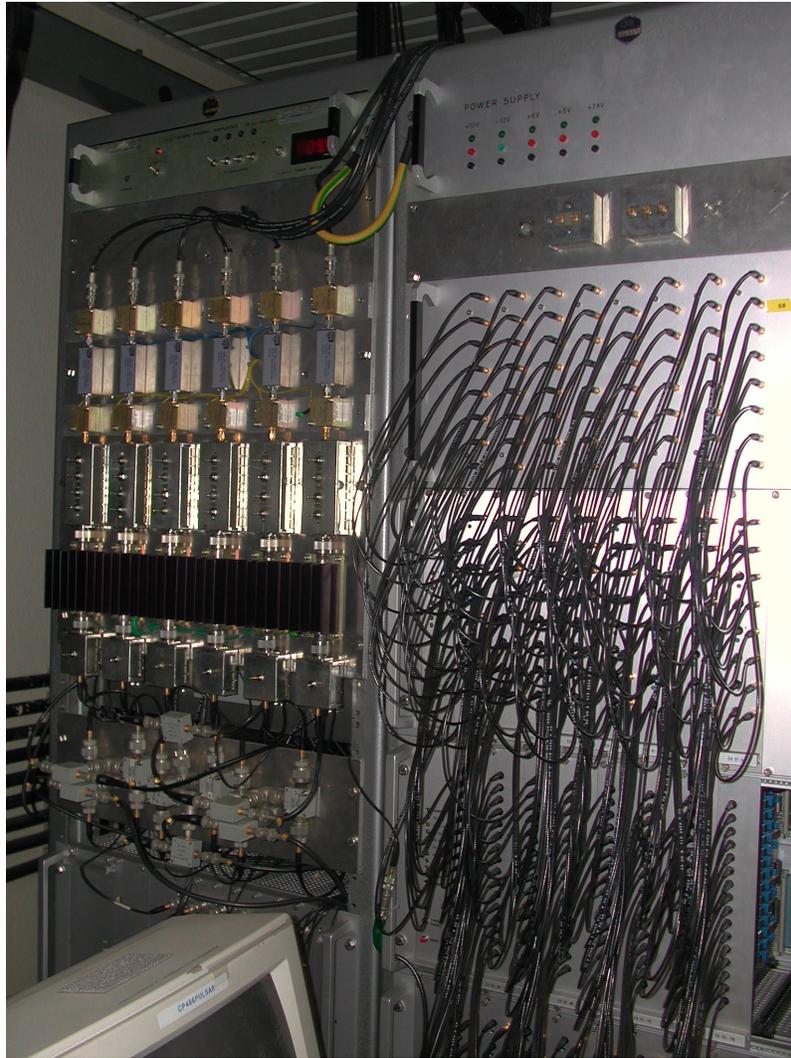


Figura 7.6: L'hardware utilizzato per le prove di calibrazione con BEST-1 (banco PULSAR).

dove $K = 1.38 \cdot 10^{-23} J/K$ è la costante di Boltzmann, T_{sys} è la temperatura equivalente di rumore di sistema, A_{eff} l'area efficace dell'antenna, B la banda del sistema e τ la costante di integrazione.

Per un singolo sensore di BEST-1 si ha:

$$\begin{aligned} T_{sys} &= 82K \\ A_{eff} &= 30m^2 \\ B &= 2.7MHz \\ \tau &= 1s \end{aligned} \tag{7.3}$$

e dunque un flusso minimo rilevabile di:

$$F_{min} = 2.3 \cdot 10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1} = 2.3 Jy \tag{7.4}$$

Tale valore costituisce un minimo teorico. In realtà, utilizzando sorgenti puntiformi (con un'apertura angolare nettamente inferiore al beam), il flusso emesso da tali sorgenti dovrà essere notevolmente superiore. Nella Tab. 7.1 vengono riportate alcune radiosorgenti (con declinazione compresa tra 0° e $+60^\circ$ e dunque visibili alle nostre latitudini), idonee a condurre le prove di calibrazione con il sistema BEST-1.

Radiosorgente	RA(J2000)	DEC(J2000)	Tipo	Flusso [Jy]
3C123	04 ^h 37 ^m 04.4 ^s	+29° 40' 14"	Galassia	122
Taurus A	05 ^h 34 ^m 32.0 ^s	+22° 00' 52"	Residuo di supernova	> 1000
Virgo A	12 ^h 30 ^m 49.4 ^s	+12° 23' 28"	Galassia	520
Hercules A	16 ^h 51 ^m 08.1 ^s	+04° 59' 33"	Galassia	169
Cygnus A	19 ^h 59 ^m 28.3 ^s	+40° 44' 02"	Galassia	> 3000
Cassiopeia A	23 ^h 23 ^m 25.4 ^s	+58° 48' 38"	Residuo di supernova	> 5000

Tabella 7.1: Radiosorgenti idonee per effettuare delle prove di calibrazione con il sistema BEST-1.

7.4 Calibrazione in ampiezza di BEST-1

Nel primo riquadro di Fig. 7.7 vengono riportati i 4 segnali misurati dal banco total power durante l'osservazione del transito di *Cassiopeia-A* sul meridiano locale in data 01/10/2004, ore 21 : 45 *UT* circa. Sull'asse orizzontale viene riportato il *tempo siderale* espresso in secondi mentre sull'asse verticale il valore (in potenza) letto dagli ADC posti all'uscita degli stadi integratori.

Dal momento che si ha un dato al secondo e si hanno 3600 valori, il grafico si riferisce ad un'ora siderale di osservazione.

Si nota facilmente che il quarto fascio risulta leggermente più attenuato rispetto ai primi tre. La calibrazione in ampiezza prescinde dalle cause che hanno portato a questa divergenza di valori.

Per equalizzare in ampiezza i fasci occorre dapprima stimare, mediante una media temporale, la potenza media associata a ciascun fascio:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \\ \bar{P}_3 \\ \bar{P}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle TP_1 \rangle \\ \langle TP_2 \rangle \\ \langle TP_3 \rangle \\ \langle TP_4 \rangle \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Successivamente occorre individuare il fascio a potenza media *minima* (il quarto nell'esempio in figura):

$$\bar{P}_{min} = \min(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4) \quad (7.6)$$

L'equalizzazione in ampiezza del fascio k -esimo si ottiene inserendo nella sua catena ricevente un attenuatore di valore pari a:

$$ATT_k = 10 \log_{10} \left(\frac{\bar{P}_k}{\bar{P}_{min}} \right) [dB] \quad (7.7)$$

Nel secondo riquadro di Fig. 7.7 vengono riportati gli stessi fasci a seguito dell'operazione di equalizzazione.

Il metodo appena descritto consente un'equalizzazione totalmente *passiva* delle ampiezze (sono richiesti solo degli attenuatori). Un'altro modo di procedere, qualora si disponga anche di un guadagno regolabile per ogni canale, consiste nel calcolare la potenza *media* dei singoli fasci (anzichè la potenza *minima*) ed amplificare quelli più deboli.

7.5 Calibrazione in fase di BEST-1

La calibrazione in fase delle frange interferometriche si basa sul principio secondo il quale *l'ascensione retta della radiosorgente (RA) coincide con l'istante di tempo dell'orologio siderale locale al quale essa transita sul meridiano locale*. In altre parole, ad interferometro calibrato, l'istante di tempo t_{max} al quale viene rilevato il massimo di frangia (che corrisponde con l'istante di tempo al quale viene *effettivamente* rilevato il transito) coincide con l'istante di tempo $t_{transit}$ indicato dall'ascensione retta:

$$\Delta t = t_{max} - t_{transit} = 0 \quad (7.8)$$

Si supponga dunque di disporre di un interferometro composto da due elementi A e B e sia $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$ la differenza di fase tra i due segnali ricevuti. Qualora questa risulti nulla

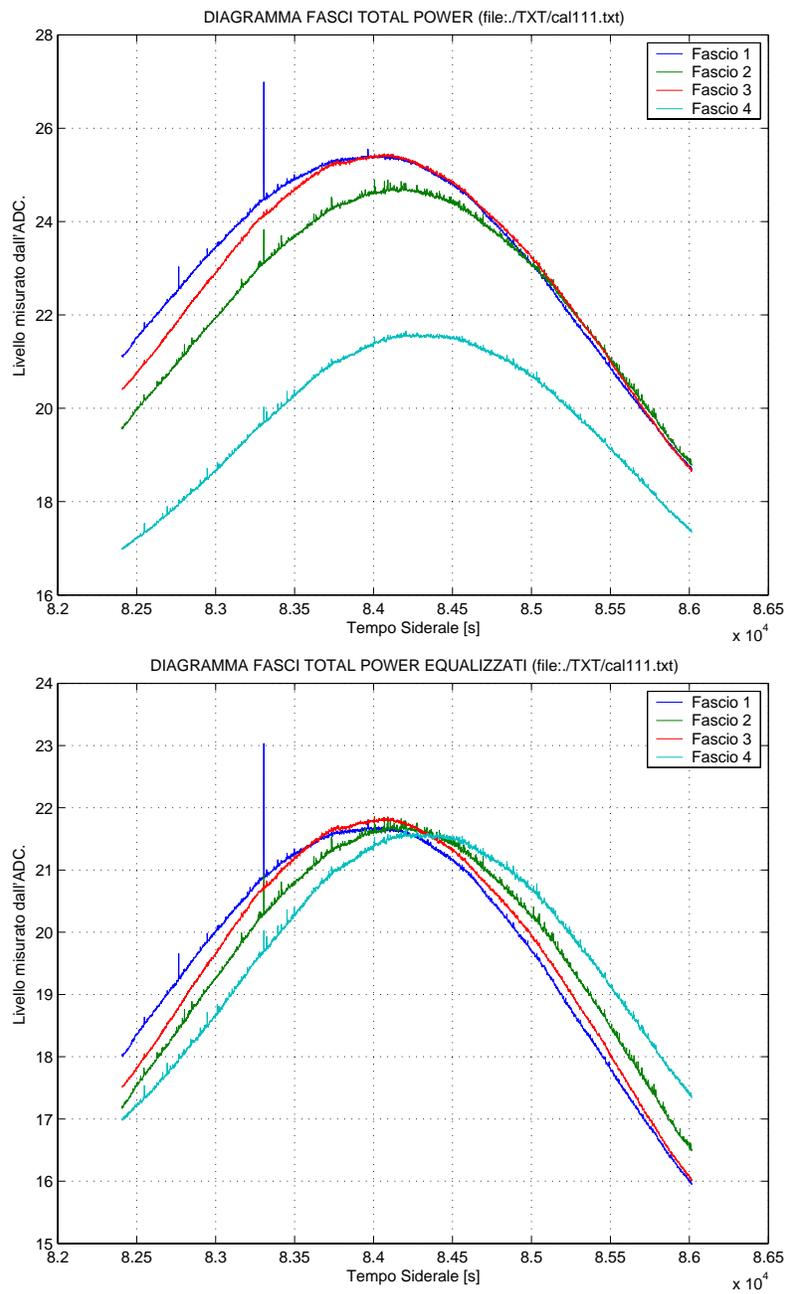


Figura 7.7: Dati prodotti dal banco total power (quadro superiore) e gli stessi dati a seguito del processo di calibrazione in ampiezza (quadro inferiore). I dati si riferiscono al transito di *Cassiopeia A* sul meridiano locale, in data 01/10/2004, ore 21 : 45 *UT* circa.

($\Delta\phi = 0$), il sistema risulta calibrato ed il massimo di frangia cade in corrispondenza del transito della radiosorgente all'ora indicata dalla sua RA (Fig. 7.8).

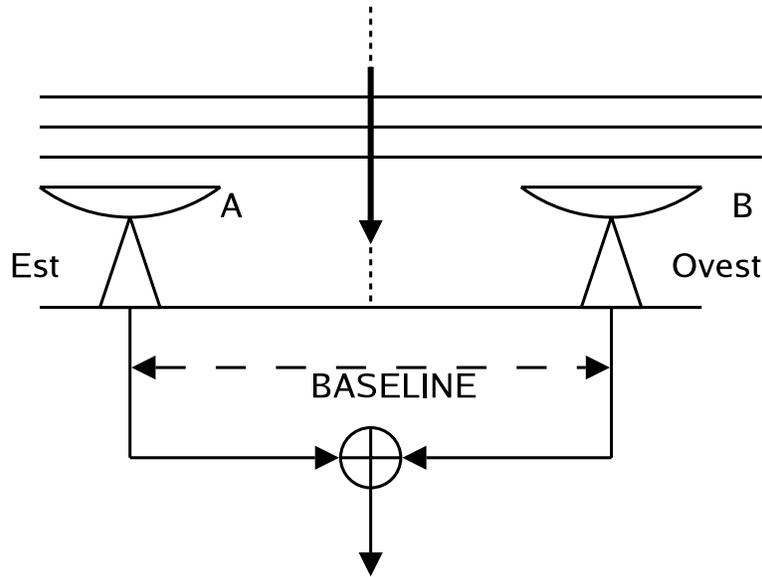


Figura 7.8: Interferometro calibrato: il transito della radiosorgente sul meridiano locale avviene all'ora siderale indicata dall'ascensione retta.

In tutti gli altri casi, ad array non calibrato, l'istante di transito effettivo avverrà in anticipo o in ritardo rispetto all'ascensione retta. In particolare, per $\Delta\phi > 0$ (B in ritardo su A), si avrà il massimo prima del transito della sorgente (Fig. 7.10) mentre per $\Delta\phi < 0$ (A in ritardo su B), il massimo cadrà dopo il transito della radiosorgente (Fig. 7.9).

Essendo noto con estrema precisione l'istante al quale dovrebbe avvenire il transito della radiosorgente, da una misura dell'istante di *transito effettivo* è possibile stimare $\Delta\phi$ e dunque rifasare lo strumento.

Analiticamente si ha che (detta δ la declinazione della radiosorgente) dalla velocità angolare apparente $\dot{\theta}$ con la quale la radiosorgente ruota sul meridiano locale:

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{86400} \cos(\delta) \quad (7.9)$$

è possibile stimare la sua DOA effettiva θ :

$$\theta = \dot{\theta} \Delta t \quad (7.10)$$

e dunque lo sfasamento tra i due sensori:

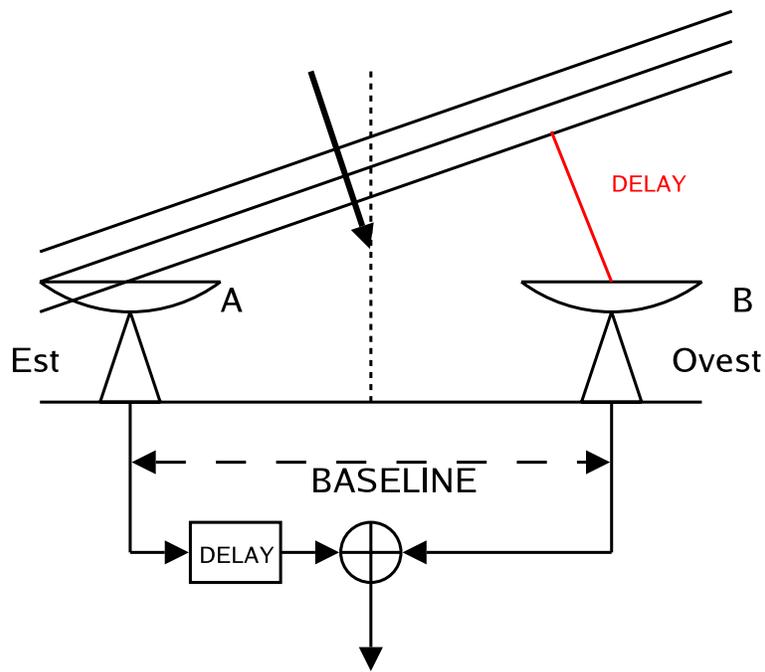


Figura 7.9: Interferometro in anticipo. Il transito della radiosorgente sul meridiano locale avviene *prima* dell'ora siderale indicata dall'ascensione retta.

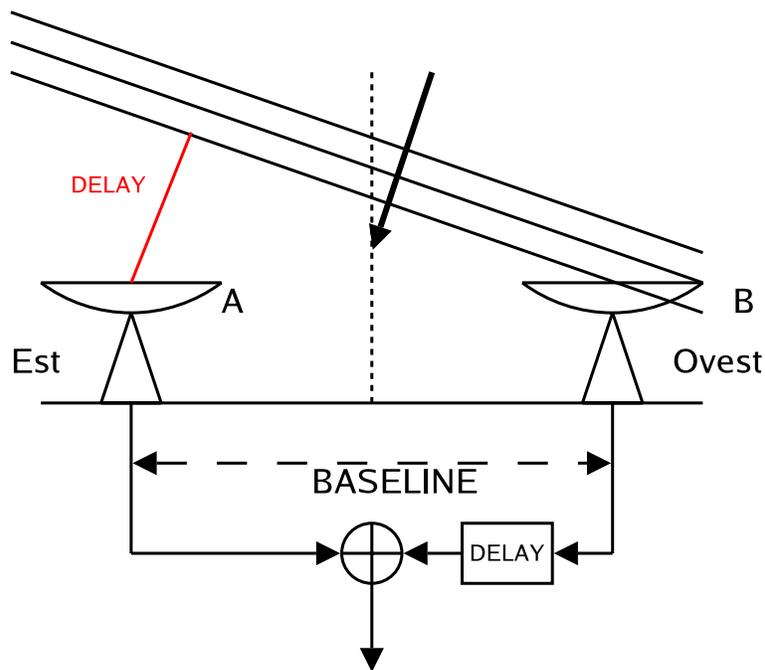


Figura 7.10: Interferometro in ritardo. Il transito della radiosorgente sul meridiano locale avviene *dopo* l'ora siderale indicata dall'ascensione retta.

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{baseline}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi \cos(\delta)\Delta t}{86400}\right) \quad (7.11)$$

Questo meccanismo è stato applicato con discreto successo al sistema BEST-1, sfruttando il transito di *Cassiopeia A*. In Fig. 7.11 vengono riportati i dati prodotti dal banco correlatore durante il transito del giorno 04/10/2004. Si osserva che l'array non risulta rifasato, in quanto i 3 istanti di transito non coincidono tra loro e con l'ora siderale indicata dall'ascensione retta. Inoltre delle RFI hanno perturbato l'osservazione proprio durante l'istante di transito della radiosorgente.

È proprio a causa delle RFI (e del rumore, se visibile nella determinata scala) che la misura del punto di massimo delle frange interferometriche non può essere effettuata mediante una misura diretta sui dati ma necessita di passare per una procedura di *fitting polinomiale*. Nelle Figg. 7.12, 7.13 e 7.14 vengono riportati i 3 fasci interferometrici misurati e le corrispondenti approssimazioni polinomiali di ordine 8. Per ciascun fascio viene fornito anche un dettaglio nell'intorno del punto di massimo.

Dalla misura degli istanti di transito è dunque possibile ricavare il valore da assegnare agli sfasatori per ottenere il rifasamento delle catene riceventi (equazione 7.11). In Fig. 7.15 viene riportato il prodotto in uscita dal banco beamformer per i valori di sfasamento ottenuti dalle prove pratiche. Si osservano una buona centratura del beam e una buona simmetria dei lobi secondari; segno che la procedura di calibrazione è avvenuta correttamente.

In ultimo, in Tab. 7.2 vengono riportati i risultati delle prove di calibrazione osservando la stessa radiosorgente in giorni diversi. Attualmente il sistema di rifasamento impiegato ha un passo minimo di 5.6° e dunque consente una precisione nel rifasamento di $\pm 2.8^\circ$. Relativamente a tale margine di errore, dai valori in tabella si deduce che il sistema è in grado di perseverare con sufficiente approssimazione lo stato calibrato per un arco di tempo di $24h$ (calibrazioni giornaliere).

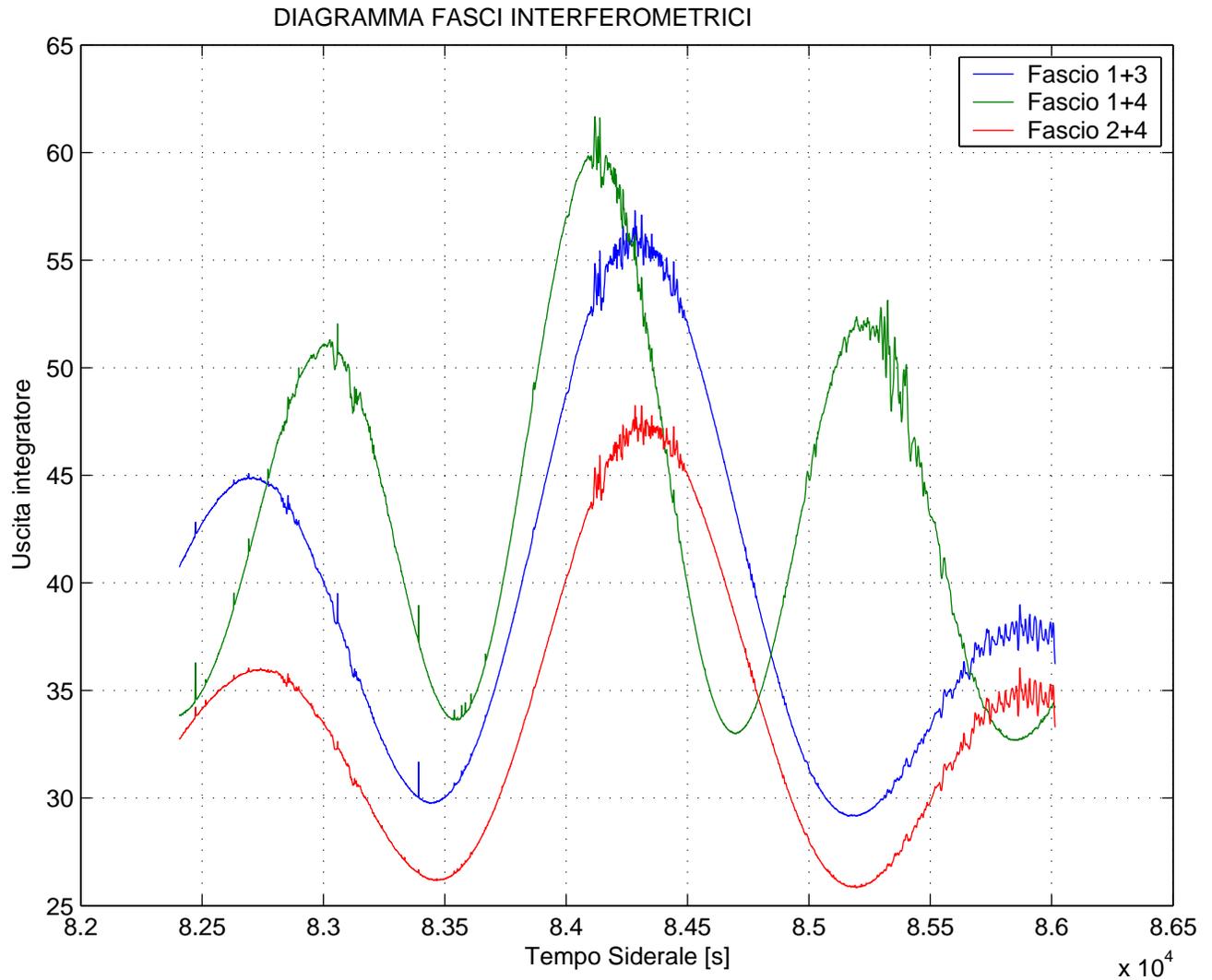


Figura 7.11: Dati prodotti dal banco correlatore durante il transito di *Cassiopeia A*, il giorno 04/10/2004. Si osserva che l'array non risulta rifasato, in quanto i 3 istanti di transito non coincidono tra loro e con l'ora siderale indicata dall'ascensione retta. Inoltre alcune RFI hanno perturbato l'osservazione proprio durante l'istante di transito della radiosorgente.

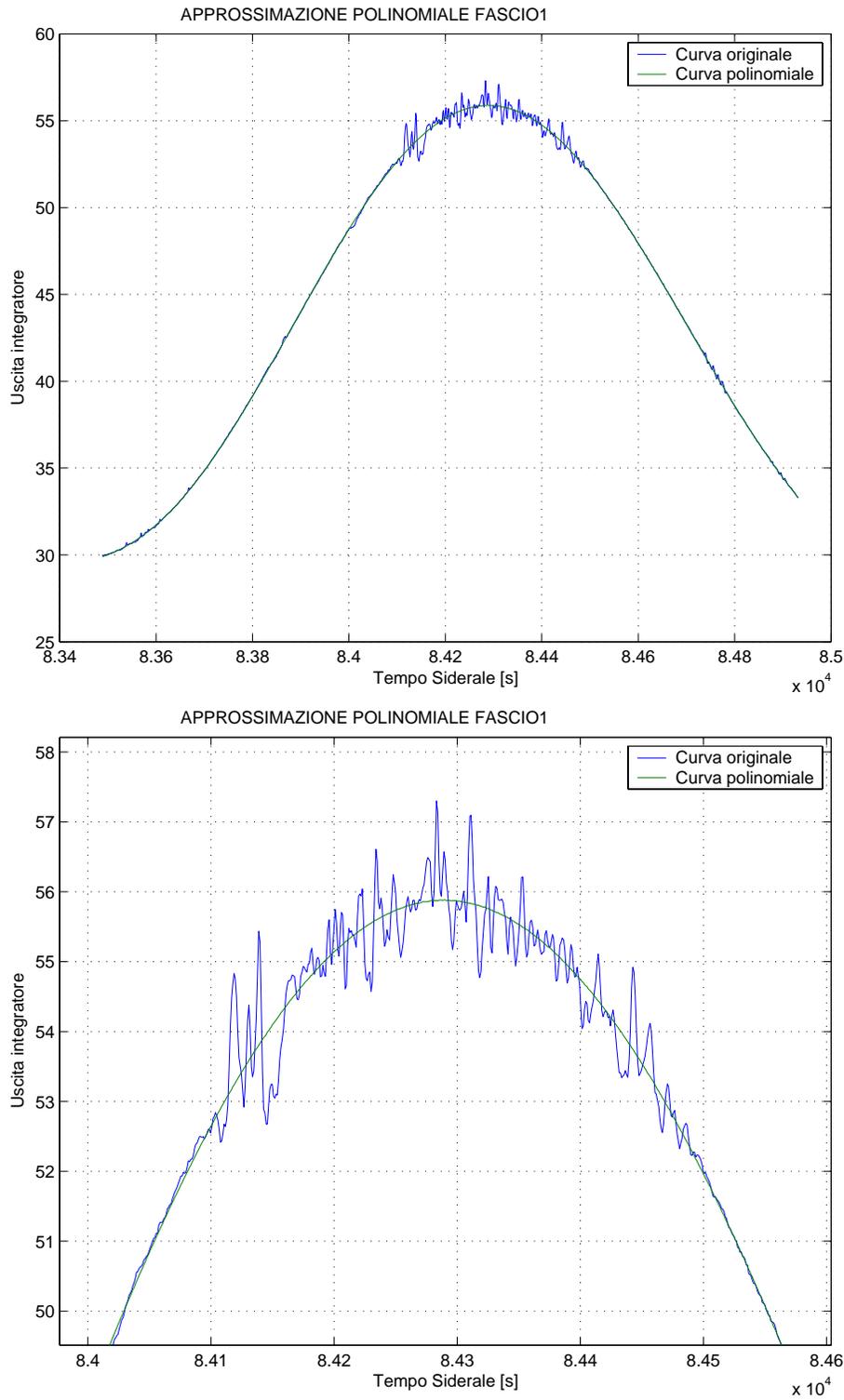


Figura 7.12: Fitting polinomiale di grado 8 per il fascio 1+3 e corrispondente dettaglio nell'intorno del punto di massimo.

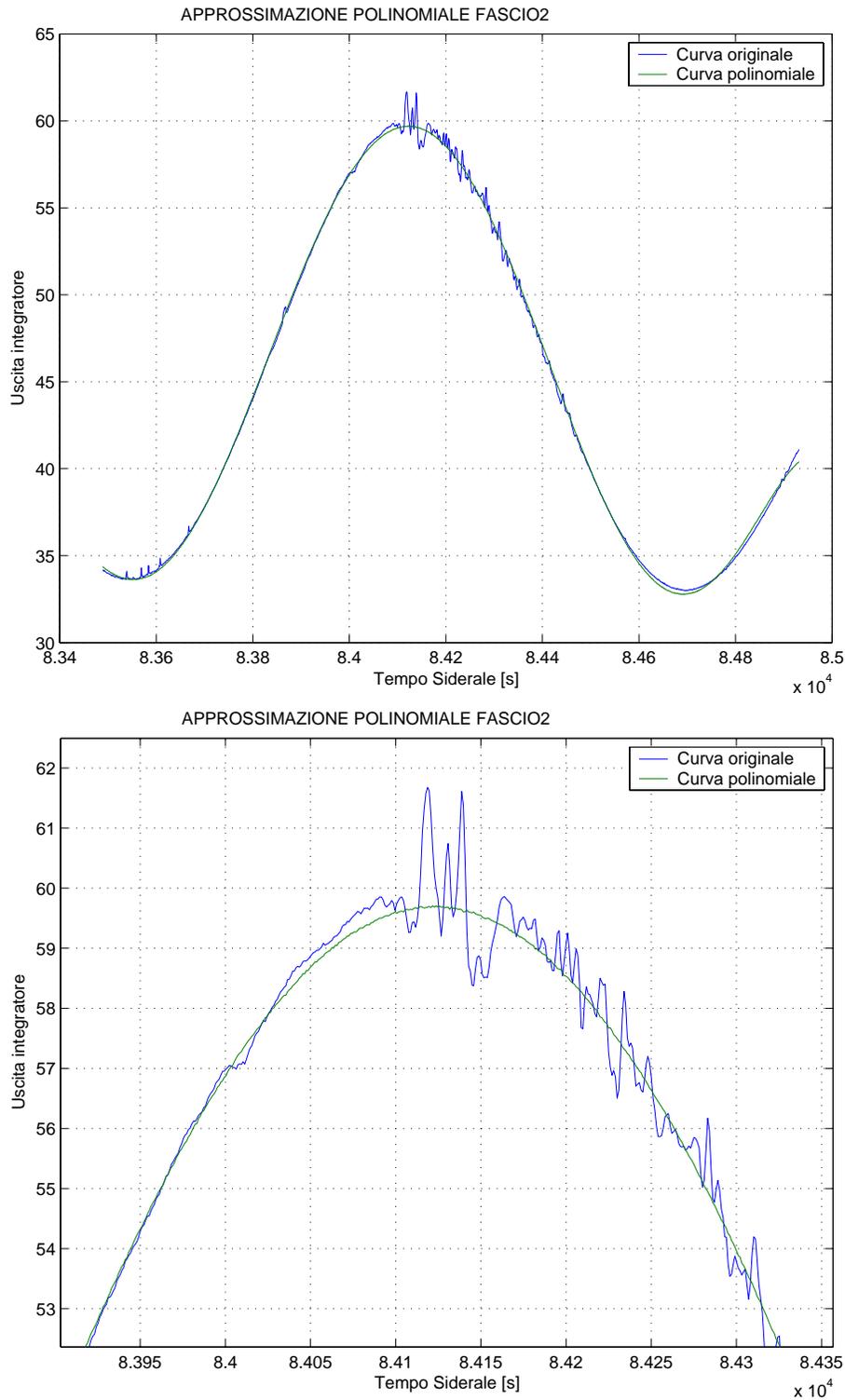


Figura 7.13: Fitting polinomiale di grado 8 per il fascio 1+4 e corrispondente dettaglio nell'intorno del punto di massimo.

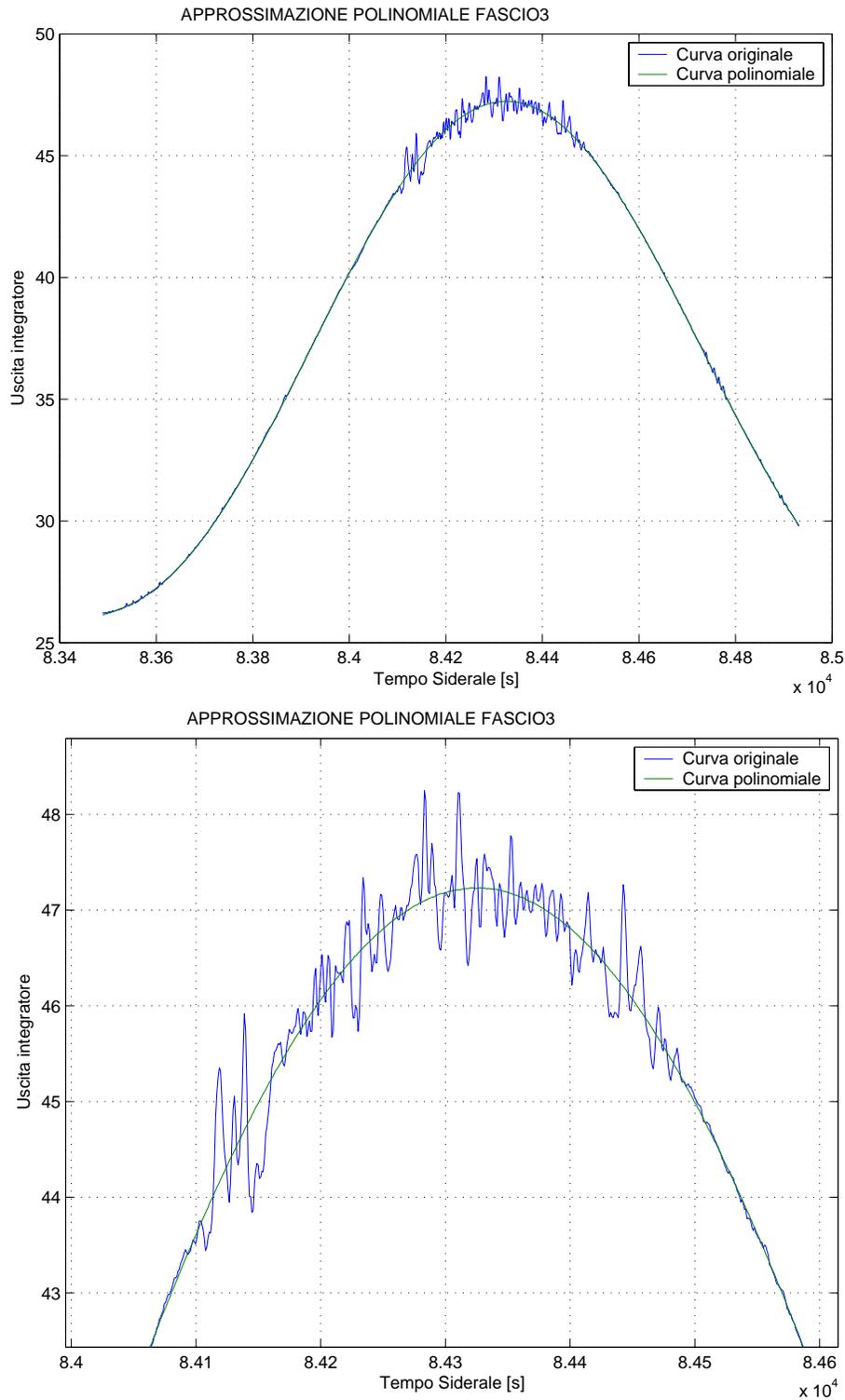


Figura 7.14: Fitting polinomiale di grado 8 per il fascio 2+4 e corrispondente dettaglio nell'intorno del punto di massimo.

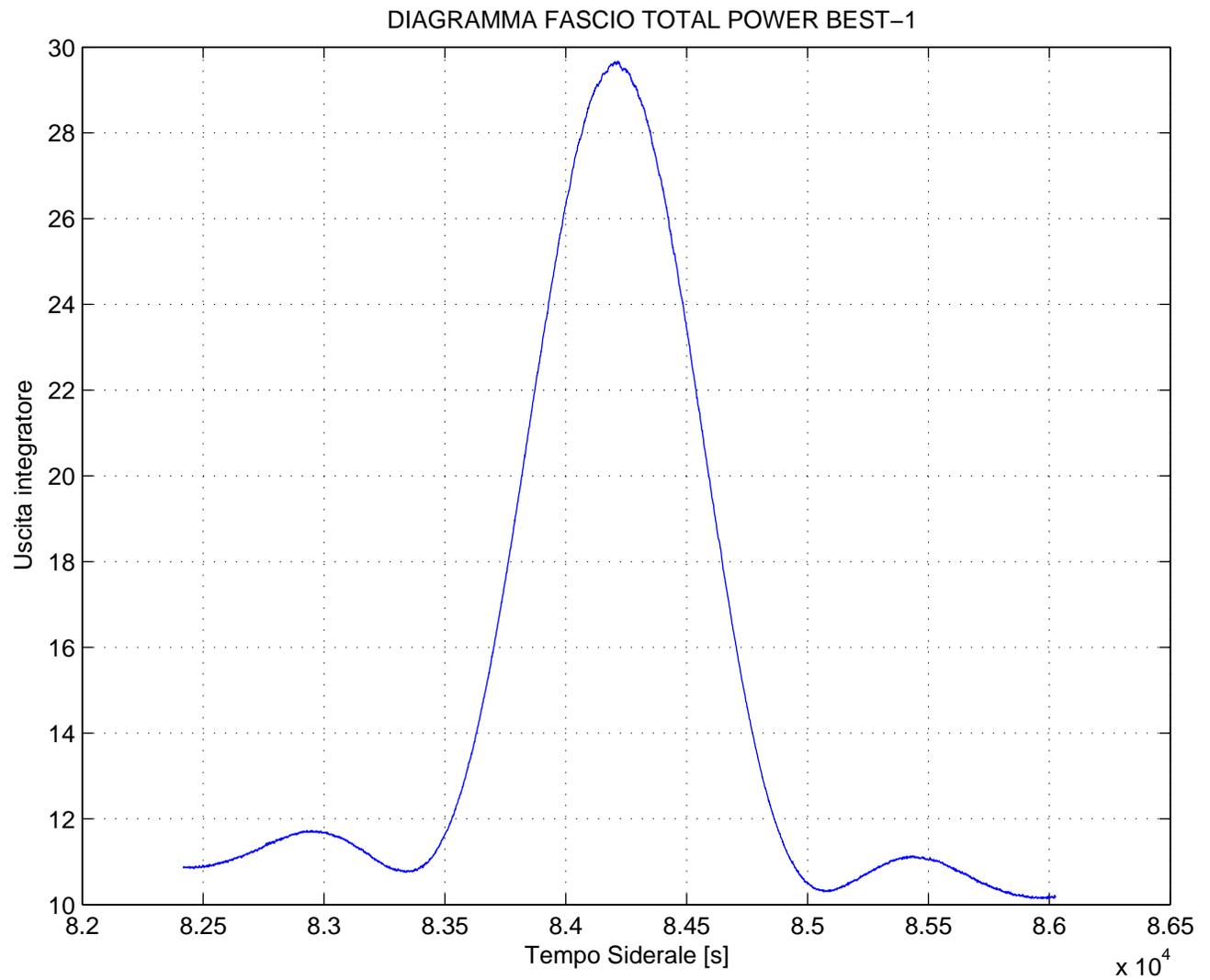


Figura 7.15: Fascio Total Power sistema BEST-1 rifasato.

FILE	DATA Osservazione	$ATT_1[dB]$	$ATT_2[dB]$	$ATT_3[dB]$	$ATT_4[dB]$
cal111	01/10/2004	0.689	0.565	0.664	0.000
cal115	02/10/2004	0.624	0.611	0.733	0.000
cal119	03/10/2004	0.572	0.528	0.653	0.000
cal123	04/10/2004	0.562	0.529	0.600	0.000
cal126	08/10/2004	0.631	0.593	0.568	0.000
cal130	09/10/2004	0.634	0.620	0.655	0.000
cal134	10/10/2004	0.642	0.611	0.639	0.000

FILE	DATA Osservazione	$SFA_1[^\circ]$	$SFA_2[^\circ]$	$SFA_3[^\circ]$	$SFA_4[^\circ]$
cal111	01/10/2004	0.000	305.593	17.094	330.515
cal115	02/10/2004	0.000	306.777	16.850	332.108
cal119	03/10/2004	0.000	306.762	16.824	332.720
cal123	04/10/2004	0.000	306.424	18.105	333.009
cal126	08/10/2004	0.000	304.009	16.455	326.983
cal130	09/10/2004	0.000	306.065	14.691	329.884
cal134	10/10/2004	0.000	301.272	15.105	324.634

Tabella 7.2: Risultati delle prove di calibrazioni ottenuti osservando il transito di *Cassiopeia-A* in giorni diversi.

Bibliografia

- [1] Bernard F. Burke and Francis Graham-Smith: *An introduction to RadioAstronomy - 2nd edition*, Cambridge University Press, 2002
- [2] Aldo Paraboni: *Antenne*, McGraw-Hill, 1999
- [3] Barry D. Van Veen and Kevin M. Buckley: *Beamforming: a versatile approach to spatial filtering*, IEEE ASSP Magazine, April 1988
- [4] Giuseppe Drufuca: *Problemi Inversi*, CUSL, 2003
- [5] G. Hampson and W. Cazemier: *Exploration of configurations for a multi-beam 1024 element adaptive phased array implementation*, ASTRON Technical Laboratory. P.O. Box 2, 7990 AA Dwingeloo, The Netherlands.
- [6] Cecilia Barnbaum and Richard F. Bradley: *A new approach to interference excision in radioastronomy: real-time adaptive cancellation.*, The Astronomical Journal, 1115:2598-2614, 1998 November
- [7] C. Bortolotti, M. Roma, M. Cecchi, S. Montebugnoli: *L'apparato ricevente del sistema Sentinel 2*, Rapporto interno IRA 324/02
- [8] C. Bortolotti, M. Roma, M. Cecchi, S. Montebugnoli: *Il convertitore in banda-base del sistema Sentinel 2*, Rapporto interno IRA 328/02
- [9] J. G. Proakis and D. G. Manolakis: *Digital Signal Processing - Principles, Algorithms and Applications - 3rd edition*, Prentice Hall International Editions, 1996
- [10] Constantine A. Balanis: *Antenna Theory - 2nd edition*, John Wiley & Sons, Inc.,1997
- [11] John D. Kraus: *Antennas - 2nd edition*, McGraw-Hill, 1988
- [12] Byung-Chul Kim and I-Tai Lu: *High Resolution Broadband Beamforming Based on the MVDR Method*, 0-7803-6551-8/00/\$10.00 - 2000 IEEE
- [13] A.R. Thompson - National Radio Astronomy Observatory, USA: *Spatial Nulling for Attenuation of Interfering Signals*, 7/8/2003

- [14] M. Kesteven - Australia Telescope National Facility, CSIRO: *Adaptive Filters for RFI Mitigation in Radioastronomy*, 25/11/2002
- [15] Bart Smolders, Member, IEEE and Grant Hampson: *Deterministic RF Nulling in Phased Arrays for the Next Generation of Radio Telescopes*, IEEE TRANSACTIONS OF ANTENNAS AND PROPAGATION, Vol. XX, N. Y, Month 1999
- [16] P.J. B. Clarricoats, G. Millington, E.D. R. Shearman and J. R. Wait: *Adaptive Array Principles*, IEE ELECTROMAGNETIC WAVES SERIES 11
- [17] M. Nicoli: *Direzioni di arrivo e Beamforming - Appunti dal corso di Elaborazione Numerica dei Segnali*, Politecnico di Milano, 2002.
- [18] Lisha Li and Brian D. Jeffs: *Analysis of adaptive array algorithm performance for satellite interference cancellation in radio astronomy.*, Brigham Young University, Department of Electrical and Computer Engineering 459 CB, Provo, UT 84602, USA, email: bjeffs@ee.byu.edu.
- [19] Zhi Tian, Member, IEEE, Kristine L. Bell, Member, IEEE, and Harry L. Van Trees, Life Fellow, IEEE: *A Recursive Least Square Implementation for LCMP beamforming under quadratic constraint*, IEEE TRANSACTIONS ON SIGNAL PROCESSING, Vol. 49, N. 6, June 2001.
- [20] R. Lorenz and S. Boyd: *Robust Minimum Variance Beamforming*, Information Systems Laboratory - Stanford University - Stanford, CA 94305-9510. email: lorenz@stanford.edu boyd@stanford.edu.
- [21] Mal Goris: *The adaptive beamformer of the SKAI adaptive antenna demonstrator*, November 6, 1997
- [22] William H. Press, Saul A. Teukolesky, William T. Vetterling and Brian P. Flannery: *Numerical recipes in C*, Cambridge University Press, 2nd edition, 1992.
- [23] Malcolm J. Goris: *Using Matlab to debug software written for a digital signal processor*, Netherlands Foundation for Research in Astronomy, Post Box 2, 7990 AA Dwingeloo. The Netherlands - email: mgoris@nfra.nl
- [24] M. Goris, A. Joseph, G. Hampson, F. Smits: *An adaptive beamforming system for radio-frequency interference rejection*, Netherlands Foundation for Research in Astronomy, Post Box 2, 7990 AA Dwingeloo. The Netherlands
- [25] G. Hampson, M. Goris, A. Joseph e F. Smits: *The Adaptive Antenna Demonstrator*, Published in 1998 IEEE Digital Signal Processing Workshop, Bryce Canyon, Utah, USA.
- [26] Hampson and Cazemier: *The effects oh THEA tile configuration on digital beamforming and adaptive nulling*, ASTRON 2000.
- [27] Leshem, A. and A.J. van der Veen: *Introduction to Interference Mitigation Techniques in Radio Astronomy*, Perspective in Radio Astronomy - Technologies for Large Antenna Arrays, A. B. Smolders and M. P. van Haarlem, eds., Netherlands Foundation for Radio Astronomy, 1999.

- [28] Leshem, A. and A.J. van der Veen: *The Effect of Adaptive Interference Suppression on Radio Astronomical Image Formation*, Radio Telescopes, H. R. Butcher, Ed., Proc. S.P.I.E., 4015, 341-352, 2000.
- [29] Leshem, A. - A. J. van der Veen and A. J. Boonstra: *Multichannel Interference Mitigation Techniques in Radio Astronomy*, Astrophys. J. Suppl, 131, 355-373, 2000
- [30] Fridman, P.A. e W. Baan: *RFI Mitigation Methods in Radio Astronomy*, Astron. Astrophys., 378, 327-344, 2001.
- [31] Kay, S. M.: *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Detection Theory*, Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- [32] Ellington, S. W., Bunton, J. D. & Bell, J. F.: *Proc. SPIE*, 4015, 400.
- [33] Briggs, F. H., Bell, J. F., Kesteven M. J.: *Removing radio interference from contaminated astronomical spectra using an independent reference signal and closure relations.*, The Astronomical Journal, 120:3351-3361, Dicembre 2000.
- [34] G. Pupillo: *Calibration of receivers (Presentazione PPT)*, ISAC del CNR, Bologna.
- [35] Diane Fisher Miller: *Basics of RadioAstronomy for the Goldstone-Apple Valley Radio Telescope*, Jet Propulsion Laboratory (JPL), California Insitute of Technology - <http://www.jpl.nasa.gov/radioastronomy>
- [36] Flavio Falcinelli: *Radioastronomia Amatoriale*, Ed. Il rostro.
- [37] <http://www.vialattea.net>
- [38] A. Ficarra, E. Gandolfi, F. Perugini: *Il radiotelescopio "Croce del Nord"*, Giornale di Astronomia, Vol. 3°, N°3, Settembre 1977.
- [39] Peter J. Hall: *The Square Kilometre Array Radio Telescope*, CSIRO Australia Telescope National Facility, PO Box 76, Epping, NSW 1710 - email: Peter.Hall@atnf.csiro.au.
- [40] Ada Vittoria Bosisio: *Lezioni di radiometria*, Edizioni CUSL.